Notes du cours MTH1101 – Calcul I
Partie II: fonctions de plusieurs variables

Guy Desaulniers

Département de mathématiques et de génie industriel
École Polytechnique de Montréal

Automne 2022

Table des matières

Table des matières

Définition : fonction de plusieurs variables

Une fonction f de n variables assigne à chaque vecteur $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de son domaine de définition $D \subseteq \mathbb{R}^n$ une valeur réelle unique, notée $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & D \to \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Définition : domaine et image

D est appelé le domaine de définition de f et l'image I de f sur D est l'ensemble des valeurs que peut prendre f sur D :

$$I = \{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D\}.$$

Il existe plusieurs façons de représenter des fonctions de plusieurs variables :

- Algébriquement
- Graphiquement
- Numériquement

Représentation algébrique

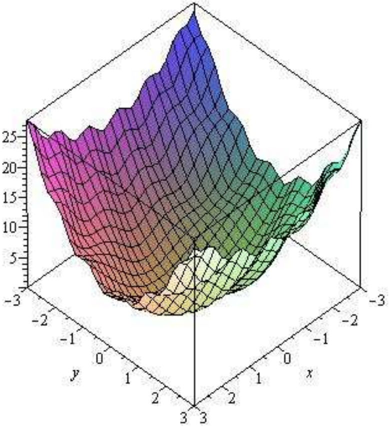
$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{5x_1^2 e^{x_2+x_3}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}.$$

Représentation graphique

- Pour une fonction $f(x, y)$ de 2 variables, on dessine une surface au dessus de son domaine de définition D.
- Pour chaque couple $(x_0, y_0) \in D$, un seul point (x_0, y_0, z_0) appartient à cette surface

$$\{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, z = f(x, y)\}.$$

Surface de $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + \sin 2xy, \ x, y \in [-3, 3]$



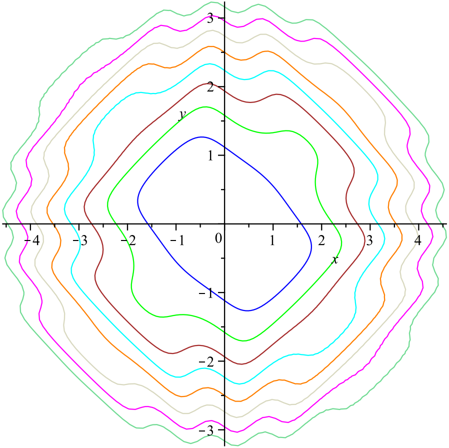
Définition : courbes de niveau

Les courbes de niveau d'une fonction $f(x, y)$ de 2 variables sont les courbes d'équations $f(x, y) = k$ où $k \in I$.

Remarques

- Des courbes de niveau rapprochées indiquent une forte variation de la fonction dans cette région.
- Des courbes de niveau éloignées indiquent que la fonction est relativement constante dans cette région.

Courbes de niveau de $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + \sin 2xy$, $k \in \{0, 2.5, \ldots, 17.5, 20\}$



Représentation numérique

À l'aide d'un tableau :

		x		
		3	4	5
	0.0	22.5	21.0	19.8
y	0.5	21.6	20.7	19.6
	1.0	21.1	20.7	19.9
	1.5	20.9	21.1	20.6

Table des matières

Définition intuitive : limite d'une fonction de 2 variables

La limite de $f(x,y)$ quand (x,y) tend vers (a,b) vaut L (i.e., $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$) si les valeurs de $f(x,y)$ peuvent être rendus aussi proche que l'on veut de L en prenant (x,y) suffisamment proche de (a,b) (mais pas égal à (a,b)).

Définition formelle : limite d'une fonction de 2 variables

$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|f(x,y) - L| < \epsilon \quad \forall\,(x,y) \in D \cap B_\delta(a,b),$$

où $B_\delta(a,b) = \{(x,y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 < \delta^2\}$.

Pour montrer qu'une limite n'existe pas, il suffit de montrer que la limite est différente le long de deux chemins se rendant en (a, b).

Quelques lois

- $\lim(f(x,y)+g(x,y)) = \lim f(x,y) + \lim g(x,y)$
- $\lim(f(x,y)-g(x,y)) = \lim f(x,y) - \lim g(x,y)$
- $\lim f(x,y)g(x,y) = \lim f(x,y) \lim g(x,y)$
- $\lim cf(x,y) = c \lim f(x,y)$ où $c \in \mathbb{R}$
- $\lim \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\lim f(x,y)}{\lim g(x,y)}$ si $\lim g(x,y) \neq 0$

Définition : fonction continue

- Une fonction f de 2 variables est continue en (a, b) si

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

- Une fonction f est continue sur son domaine D si elle est continue en tout point $(a, b) \in D$.

Remarques

- Une fonction $f(x,y)$ est discontinue en (a,b) dès que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ n'existe pas ou que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \neq f(a,b)$.
- La surface d'une fonction discontinue contient nécessairement un trou ou une fracture.

- Par les lois sur les limites et la définition de la continuité, il découle que les sommes, les différences, les produits et les quotients de fonctions continues sont aussi continues sur leur domaine de définition.
- En particulier, tout polynôme est une fonction continue et toute fonction rationnelle (quotient de deux polynômes) est continue sur son domaine.

Proposition

Si f est une fonction continue de 2 variables et g une fonction continue d'une variable définie sur l'image de f, alors la fonction composée $h = g \circ f$ définie par $h(x, y) = g(f(x, y))$ est aussi continue.

Remarque

Toutes les définitions et résultats précédents se généralisent aux fonctions de plus de 2 variables.

Table des matières

Rappel : dérivée d'une fonction d'une variable

Soit $f(x) : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in D$, alors

$$f'(a) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si la limite existe.

$$\begin{aligned} f'(a) &= \text{taux de variation de } f \text{ au point } x = a \\ &= \text{pente de la tangente de } f \text{ au point } x = a \\ &\approx \tfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \text{ si } h \text{ est petit} \end{aligned}$$

Définition : dérivée partielle

Soit $f(x,y) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $(a,b) \in D$. La dérivée partielle de f par rapport à x en (a,b) est

$$f_x(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

si la limite existe.

Cette dérivée donne le taux de variation de f par rapport à x (en gardant $y = b$ fixe) au point $(x,y) = (a,b)$.

De même, la dérivée partielle de f par rapport à y en (a,b) est

$$f_y(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}.$$

- Lorsque y est fixe à b, on peut voir $f(x, y)$ comme une fonction d'une seule variable $g(x) = f(x, b)$. Dans ce cas, $f_x(a, b) = g'(a)$.
- En posant $G(y) = f(a, y)$, on trouve aussi $f_y(a, b) = G'(b)$.
- Par conséquent, une dérivée partielle n'est rien de plus que la dérivée d'une fonction d'une seule variable.

Calcul d'une dérivée partielle

Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables.

- Pour calculer $f_x(x, y)$, on considère y comme une constante et on dérive par rapport à x.
- Pour calculer $f_y(x, y)$, on considère x comme une constante et on dérive par rapport à y.

Définition : dérivée partielle d'une fonction de n variables

Soit $f(x_1, \ldots, x_n) : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in D$. Alors

$$f_{x_i}(\vec{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{h}$$

si la limite existe.

Approximation d'une dérivée partielle

Si la fonction n'est pas connue sous forme analytique, on peut quand même faire des approximations des dérivées partielles lorsque la fonction est connue numériquement ou graphiquement par courbes de niveau.

On peut alors utiliser l'une des formules d'approximation suivantes, appelées formules aux différences finies (h est petit) :

- $f_x(a, b) \approx \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$
- $f_x(a, b) \approx \frac{f(a,b)-f(a-h,b)}{h}$
- $f_x(a, b) \approx \frac{f(a+h,b)-f(a-h,b)}{2h}$

Définition : dérivées partielles d'ordre supérieur

Les dérivées partielles sont aussi des fonctions qui peuvent être dérivées pour obtenir des dérivées partielles d'ordre supérieur.

$$\text{Ordre 2 :} \quad f_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

$$f_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$$

$$\text{Ordre 3 :} \quad f_{xxx}(x,y), f_{yyy}(x,y), f_{xxy}(x,y), f_{xyx}(x,y), \ldots$$

Théorème

Si f_{xy} et f_{yx} sont continues, alors $f_{xy} = f_{yx}$.

Table des matières

Plan tangent à une surface

Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables. L'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point (x_0, y_0, z_0) (où $z_0 = f(x_0, y_0)$) est donnée par :

$$z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Approximation linéaire

Le plan tangent peut servir d'approximation de $f(x, y)$ autour de (x_0, y_0). On parle d'approximation linéaire ou de linéarisation de $f(x, y)$.

$$f(x, y) \approx L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Définition intuitive : fonction différentiable

Une fonction $f(x, y)$ qui peut être approximée convenablement par un plan autour d'un point (x_0, y_0) est dite différentiable en (x_0, y_0).

Théorème

Si f_x et f_y existent à proximité de (x_0, y_0) et sont continues en (x_0, y_0), alors $f(x, y)$ est différentiable en (x_0, y_0).

Définition : différentielle

Soit $f(x, y)$ une fonction différentiable en (x_0, y_0). Alors la différentielle de $f(x, y)$ en (x_0, y_0) est donnée par :

$$dz = f_x(x_0, y_0)\, dx + f_y(x_0, y_0)\, dy.$$

Remarque

La différentielle mesure la différence entre l'approximation proposée par $L(x, y)$ au point $(x_0 + dx, y_0 + dy)$ et $f(x_0, y_0)$, i.e.,

$$L(x, y) = z_0 + dz.$$

Fonctions de n variables

Soit $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction de n variables et $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un point du domaine de définition de $f(\vec{x})$. Posons $z = f(\vec{x})$.

- L'équation du plan tangent de $f(\vec{x})$ en $\vec{a}$ est donnée par :

$$z = f(\vec{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})(x_i - a_i).$$

- La différentielle de $f(\vec{x})$ en $\vec{a}$ est donnée par :

$$dz = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})dx_i.$$

Table des matières

Rappel

Si $y = f(x)$ où $x = g(t)$, alors $y = f(g(t))$ est une fonction de t et

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

Cas 1

Si $z = f(x, y)$ où $x = g(t)$ et $y = h(t)$, alors $z = f(g(t), h(t))$ est une fonction de t et

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Cas 2

Si $z = f(x, y)$ où $x = g(s, t)$ et $y = h(s, t)$, alors $z = f(g(s, t), h(s, t))$ est une fonction de deux variables s et t, et

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Table des matières

Définition : dérivée directionnelle

Soit $z = f(x, y)$ une fonction de deux variables et $\vec{u} = (a, b)$ un vecteur unitaire. La dérivée directionnelle de $f(x, y)$ en (x_0, y_0) dans la direction $\vec{u}$ est notée $f_{\vec{u}}(x_0, y_0)$ et vaut

$$f_{\vec{u}}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

si la limite existe. Cette dérivée donne le taux de variation de $f(x, y)$ en (x_0, y_0) dans la direction $\vec{u}$.

Proposition

$$f_{\vec{u}}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b.$$

Définition : gradient

Le vecteur $\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$ est appelé le gradient de f en (x_0, y_0). Notations équivalentes :

$$\nabla f = grad\ f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath}.$$

Par conséquent,

$$f_{\vec{u}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (a, b).$$

Taux de variation maximum

- Le gradient $\nabla f(x_0, y_0)$ indique la direction (possiblement, non unitaire) dans laquelle la fonction $f(x, y)$ a le plus grand taux de variation en (x_0, y_0).
- Le taux de variation maximal vaut $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$.
- $\nabla f(x_0, y_0)$ (si $\neq \vec{0}$) est perpendiculaire à la tangente à la courbe de niveau qui passe par (x_0, y_0).

Fonctions de plus de 2 variables

Soit $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction de n variables.

- Gradient :

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\vec{\imath}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\vec{\imath}_2 + \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}\vec{\imath}_n$$

- Dérivée directionnelle dans la direction $\vec{u}$:

$$f_{\vec{u}} = \nabla f \cdot \vec{u}$$

- Direction de croissance maximale $= \nabla f$

Vecteur normal à une courbe

Soit $f(x)$ une fonction d'une variable et C la courbe définie par $y = f(x)$. Posons $F(x, y) = f(x) - y$. Alors, le vecteur $\vec{n} = \nabla F(x_0, f(x_0)) = (f'(x_0), -1)$ est perpendiculaire à C en $(x_0, f(x_0))$.

Vecteur normal à une surface

Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables et S la surface définie par $z = f(x, y)$. Posons $F(x, y, z) = f(x, y) - z$. Alors, le vecteur $\vec{n} = \nabla F(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1)$ est normal à S en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Plan tangent à une surface

Soit S une surface définie par $F(x, y, z) = k$. Alors, $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ est un vecteur normal à S en (x_0, y_0, z_0). De plus, l'équation du plan tangent à S en (x_0, y_0, z_0) est :

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)+F_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)+F_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0) = 0$$

si $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$.

En particulier, si $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, alors l'équation devient :

$$z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = L(x, y).$$

Droite normale à une surface

Soit S une surface définie par $F(x, y, z) = k$. Alors, $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ est la direction de la droite normale à S au point (x_0, y_0, z_0) et les équations paramétriques de cette droite sont :

$$\begin{array}{rcl} x & = & x_0 + tF_x(x_0, y_0, z_0) \\ y & = & y_0 + tF_y(x_0, y_0, z_0) \qquad t \in \mathbb{R} \\ z & = & z_0 + tF_z(x_0, y_0, z_0). \end{array}$$

Table des matières

Série de Taylor

Soit $f(x,y)$ une fonction de deux variables. La série de Taylor de $f(x,y)$ autour de (x_0,y_0) est :

$$\begin{aligned}
T(x,y) \quad = \quad & f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)+\\
& \frac{1}{2!}[f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)\\
& +f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2]+\frac{1}{3!}[f_{xxx}(x_0,y_0)(x-x_0)^3+\\
& 3f_{xxy}(x_0,y_0)(x-x_0)^2(y-y_0)+\\
& 3f_{xyy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)^2+\\
& f_{yyy}(x_0,y_0)(y-y_0)^3]+\dots
\end{aligned}$$

Approximations linéaire et quadratique

$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$\begin{aligned} Q(x,y) = {} & f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \\ & \frac{1}{2!}[f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) \\ & + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2] \end{aligned}$$

Borne sur l'erreur pour l'approximation linéaire

$$|E_L(x,y)| = |f(x,y) - L(x,y)| \leq M_L d^2$$

où d est la distance maximum entre (x_0, y_0) et un point $(x,y) \in D$ et

$$M_L = \max_{(x,y)\in D} \{|f_{xx}(x,y)|, |f_{xy}(x,y)|, |f_{yy}(x,y)|\}.$$

Borne sur l'erreur pour l'approximation quadratique

$$|E_Q(x,y)| = |f(x,y) - Q(x,y)| \leq \frac{\sqrt{2}}{3} M_Q d^3$$

où d est la distance maximum entre (x_0, y_0) et un point $(x,y) \in D$ et

$$M_Q = \max_{(x,y)\in D} \{|f_{xxx}(x,y)|, |f_{xxy}(x,y)|, |f_{xyy}(x,y)|, |f_{yyy}(x,y)|\}.$$