Notes du cours MTH1101 – Calcul I
Partie I: Suites, séries et nombres complexes

Guy Desaulniers

Département de mathématiques et de génie industriel
École Polytechnique de Montréal

Automne 2022

Table des matières

1. Suites, séries et nombres complexes
   - Les suites infinies
   - Les séries
   - Tests de l'intégrale et de comparaison
   - Autres tests de convergence
   - Les séries entières
   - Développement des fonctions en séries entières
   - Séries de Taylor et MacLaurin
   - Les nombres complexes

Table des matières

1. Suites, séries et nombres complexes
   - Les suites infinies
   - Les séries
   - Tests de l'intégrale et de comparaison
   - Autres tests de convergence
   - Les séries entières
   - Développement des fonctions en séries entières
   - Séries de Taylor et MacLaurin
   - Les nombres complexes

Définition : suite infinie

- Une suite infinie est un ensemble ordonné d'une infinité de nombres réels $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$.
- Elle peut s'exprimer à l'aide d'une fonction $a_n = f(n)$
  - $\{\frac{n}{n+1}\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\}$
- Elle peut s'exprimer par récursion
  - $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{6-a_n}$ pour $n \geq 1$
  - $f_1 = f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ pour $n \geq 3$ (Fibonacci)

Définition : limite d'une suite

- La limite L d'une suite $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ existe lorsque les termes a_n peuvent être rendus aussi proche que l'on veut de L en prenant n suffisamment grand.
- Dans ce cas, on écrit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{ou} \quad a_n \to L \text{ lorsque } n \to \infty.$$

- Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe, la suite converge.
- Sinon elle diverge.

Deux questions

- Est-ce qu'une suite converge ou diverge ?
- Si elle converge, vers quelle valeur ?

Théorème

Si $a_n = f(n)$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Théorème du sandwich

Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ pour $n \geq n_0$ et $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, alors $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Corollaire

Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Théorème

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ et f est une fonction continue en L, alors $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(L)$.

Quelques lois

Soit $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$, deux suites convergentes. Soit $c \in \mathbb{R}$. Alors

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ si $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$

Définition : suite croissante/décroissante

- Une suite $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ est
  - croissante si $a_n \leq a_{n+1}$ pour tout $n \geq n_0$;
  - décroissante si $a_n \geq a_{n+1}$ pour tout $n \geq n_0$.
- Une suite est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Définition : suite bornée

- Une suite $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ est
  - bornée supérieurement s'il existe un nombre M tel que $a_n \leq M$ pour tout $n \geq n_0$;
  - bornée inférieurement s'il existe un nombre m tel que $a_n \geq m$ pour tout $n \geq n_0$.
- Une suite est bornée si elle est bornée inférieurement et supérieurement.

Théorème d'une suite monotone

Toute suite bornée et monotone est convergente.

Remarques

- Il existe des suites bornées qui ne convergent pas.
- Il existe des suites monotones qui ne convergent pas.
- Toute suite convergente est bornée.
- Il existe des suites convergentes qui sont non monotones.

Table des matières

1. Suites, séries et nombres complexes
   - Les suites infinies
   - Les séries
   - Tests de l'intégrale et de comparaison
   - Autres tests de convergence
   - Les séries entières
   - Développement des fonctions en séries entières
   - Séries de Taylor et MacLaurin
   - Les nombres complexes

Définition : série infinie

- Soit une suite infinie $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$. L'expression

$$a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \ldots = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$$

  s'appelle une série infinie.
- Exemples
  - $\sum_{n=3}^{\infty} n = 3 + 4 + 5 + \ldots$ diverge.
  - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1$ converge.

Définition : somme partielle

Considérons la série $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

- La somme partielle des k premiers termes est $s_k = \sum_{i=1}^{k} a_{n_0+i-1}$.
- La suite des sommes partielles est donnée par $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Définition : convergence/divergence d'une série

- Si $\lim_{k\to\infty} s_k = s$ existe, alors $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ est convergente et on écrit $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = s$.
- Dans ce cas, s s'appelle la somme de la série.
- Sinon la série est divergente.

Définition : série géométrique

- La série géométrique est donnée par

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

  pour $a \neq 0$.
- Elle diverge si $|r| \geq 1$.
- Sinon ($|r| < 1$) elle converge et sa somme vaut $\frac{a}{1-r}$.

Théorème

Si $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Théorème de la divergence

Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ou n'existe pas, alors $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge.

Remarque

Il existe des séries divergentes $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ telles que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Quelques lois

Soit $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = A$ et $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n = B$, deux séries convergentes. Soit $c \in \mathbb{R}$. Alors

- $\sum_{n=n_0}^{\infty} c\, a_n = cA$
- $\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$
- $\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n - b_n) = A - B$

Table des matières

1. Suites, séries et nombres complexes
   - Les suites infinies
   - Les séries
   - Tests de l'intégrale et de comparaison
   - Autres tests de convergence
   - Les séries entières
   - Développement des fonctions en séries entières
   - Séries de Taylor et MacLaurin
   - Les nombres complexes

La suite des sommes partielles d'une série à termes positifs est strictement croissante. Par conséquent, la série converge si cette suite est bornée.

Test de l'intégrale

Soit f une fonction continue, positive et décroissante sur $[n_0, \infty[$. Soit $a_n = f(n)$.

- Si $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx$ converge, alors $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge.
- Si $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx$ diverge, alors $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge.

Définition : série de Riemann

- Une série de Riemann est donnée par

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ pour } p \in \mathbb{R}.$$

- Elle converge si $p > 1$. Elle diverge si $p \leq 1$.

Définition : série harmonique

- La série de Riemann avec $p = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

  s'appelle la série harmonique.
- Elle diverge.

Test de comparaison

Soit $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ des séries à termes positifs.

- Si $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ converge et $a_n \leq b_n$ pour tout $n \geq n_0$, alors $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge aussi.
- Si $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ diverge et $a_n \geq b_n$ pour tout $n \geq n_0$, alors $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge aussi.

Forme limite du test de comparaison

Soit $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ des séries à termes positifs. Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \text{ et } c > 0,$$

alors $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ convergent toutes les deux ou divergent toutes les deux.

Table des matières

1 Suites, séries et nombres complexes
- Les suites infinies
- Les séries
- Tests de l'intégrale et de comparaison
- Autres tests de convergence
- Les séries entières
- Développement des fonctions en séries entières
- Séries de Taylor et MacLaurin
- Les nombres complexes

Définition : série alternée

Une série alternée est de la forme

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n \text{ ou } \sum_{n=n_0}^{\infty}(-1)^{n}b_n$$

avec $b_n > 0$ pour tout $n \geq n_0$. Par exemple, la série harmonique alternée est

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Test des séries alternées (de Leibniz)

Si $b_n \geq b_{n+1}$ pour tout $n \geq n_0$ et $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, alors $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge ($a_n = (-1)^{n-1} b_n$ ou $(-1)^n b_n$).

Estimation du reste

Si $b_n \geq b_{n+1}$ pour tout $n \geq n_0$ et $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, alors

$$|R_k| = |s - s_k| \leq b_{k+1}.$$

Définition : convergence absolue

Une série $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ est dite absolument convergente si $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ est convergente.

Théorème

Une série $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ absolument convergente est convergente.

Remarque

Il existe des séries convergentes qui ne sont pas absolument convergentes.

Test du rapport (d'Alembert)

- Si $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = L < 1$, alors $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ est absolument convergente.
- Si $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = L > 1$ ou $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \infty$, alors $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ est divergente.
- Si la limite n'existe pas ($\neq \infty$) ou est égale à 1, alors on ne peut rien conclure sur la convergence de la série.

Test de Cauchy

- Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, alors $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ est absolument convergente.
- Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ ou $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, alors $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ est divergente.
- Si la limite n'existe pas ($\neq \infty$) ou est égale à 1, alors on ne peut rien conclure sur la convergence de la série.

Table des matières

1 Suites, séries et nombres complexes
- Les suites infinies
- Les séries
- Tests de l'intégrale et de comparaison
- Autres tests de convergence
- Les séries entières
- Développement des fonctions en séries entières
- Séries de Taylor et MacLaurin
- Les nombres complexes

Définition : série entière

- Une série entière centrée en a s'écrit

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots$$

où a et c_n, $\forall\, n \geq 0$, sont des constantes et x une variable.

- La somme de cette série $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ est donc une fonction.

Remarque

$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(a-a)^n = c_0$. Par conséquent, la série converge toujours pour $x = a$.

Théorème

Pour une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, il y a trois cas possibles :

1. Elle converge seulement en $x = a$.
2. Elle converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Il existe un nombre R tel que la série converge pour $|x-a| < R$ et diverge pour $|x-a| > R$.

Remarque

Dans le cas 3, la série peut être convergente ou divergente en $x = a \pm R$. Il faut vérifier ces deux points séparément.

Définition : rayon de convergence

R est appelé le rayon de convergence.

Définition : intervalle de convergence

- Les valeurs de x pour lesquelles la série converge définissent l'intervalle de convergence. Il est noté I et est donné par $I = [a - R, a + R]$, $]a - R, a + R]$, $[a - R, a + R[$ ou $]a - R, a + R[$.
- Dans le cas 2, on écrit $I =]-\infty, \infty[$ ou $I = \mathbb{R}$.
- Dans le cas 1, on a $I = [a, a]$.

Table des matières

1. Suites, séries et nombres complexes
   - Les suites infinies
   - Les séries
   - Tests de l'intégrale et de comparaison
   - Autres tests de convergence
   - Les séries entières
   - Développement des fonctions en séries entières
   - Séries de Taylor et MacLaurin
   - Les nombres complexes

- Des fonctions peuvent s'écrire comme des séries entières.
- Par exemple, à partir de la série géométrique, on déduit que

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{pour } |x| < 1.$$

- En utilisant des transformations de la série géométrique, on peut écrire d'autres fonctions en séries entières.
- Par exemple,

$$f(x) = \frac{1}{4+x} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{-1}{4})^n x^n \quad \text{pour } |\frac{x}{4}| < 1.$$

Théorème

Si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ a un rayon de convergence $R > 0$, alors la fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ est dérivable sur l'intervalle $]a-R, a+R[$ et

- $f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$
- $\int f(x)\,dx = K + c_0(x-a) + \frac{c_1}{2}(x-a)^2 + \frac{c_2}{3}(x-a)^3 + \ldots = K + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$.

Le rayon de convergence de ces deux séries est aussi R (le comportement aux bornes de l'intervalle peut toutefois changer).

Table des matières

1. Suites, séries et nombres complexes
   - Les suites infinies
   - Les séries
   - Tests de l'intégrale et de comparaison
   - Autres tests de convergence
   - Les séries entières
   - Développement des fonctions en séries entières
   - Séries de Taylor et MacLaurin
   - Les nombres complexes

Théorème

Si une fonction $f(x)$ admet une représentation en série entière centrée en a pour $|x-a| < R$, alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad \text{pour } |x-a| < R.$$

Définitions : séries de Taylor et de MacLaurin

- Cette série est appelée la série de Taylor de f centrée en a.
- Lorsque $a = 0$, la série est aussi appelée la série de MacLaurin de f.

Définition : polynôme de Taylor

Le polynôme de Taylor de degré n de $f(x)$ centré en a est

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i.$$

Observation

Pour $x \in \mathbb{R}$ donné, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ si $f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$.

Définition : reste du polynôme de Taylor

Le reste du polynôme de Taylor de degré n, noté $R_n(x)$, est

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x).$$

Théorème

Si $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ pour $|x-a| < R$, alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \text{ pour } |x-a| < R.$$

Pour démontrer que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, on peut se servir de l'inégalité suivante.

Théorème (inégalité de Taylor)

Si $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ pour $|x-a| < d$, alors

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \quad \text{pour } |x-a| < d.$$

Dans cette inégalité, M peut dépendre de n.

Résultat utile

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Quelques séries de base

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$
- $sin\ x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$
- $cos\ x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$
- Pour ces trois séries, $R = \infty$ et $I = \mathbb{R}$.

Table des matières

1. Suites, séries et nombres complexes
   - Les suites infinies
   - Les séries
   - Tests de l'intégrale et de comparaison
   - Autres tests de convergence
   - Les séries entières
   - Développement des fonctions en séries entières
   - Séries de Taylor et MacLaurin
   - Les nombres complexes

- Les nombres complexes sont une généralisation des nombres réels.
- Ils ont été inventés pour combler les failles des nombres réels pour les fonctions telles que $\sqrt{}$, ln, ...
- Dans plusieurs cas, les nombres complexes facilitent la résolution de problèmes d'ingénierie.

Définition : nombre complexe

- Un nombre complexe se représente sous la forme

$$z = a + bi$$

  où a et b sont des réels et i est un symbole tel que $i^2 = -1$.
- i est appelé le nombre imaginaire.
- a est appelé la partie réelle de z et notée $Re(z)$.
- b est appelé la partie imaginaire de z et notée $Im(z)$.
- $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des nombres complexes.

Remarque

Un nombre réel a est aussi un nombre complexe avec $b = 0$.

Les nombres complexes peuvent se représenter dans un plan (partie réelle sur l'axe horizontal, partie imaginaire sur l'axe vertical).

Quelques propriétés

Soit $a + bi$ et $c + di$ deux nombres complexes.

- $a + bi = c + di$ si et seulement si $a = c$ et $b = d$
- $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$
- $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Définition : conjugué complexe

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe. Le conjugué complexe de z est

$$\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi.$$

Quelques lois

Soit z et w deux nombres complexes.

- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$
- $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$

Division de nombres complexes

- Pour faire une division de nombres complexes, on doit multiplier le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.
- Par exemple :

$$\frac{3+2i}{2-4i} = \frac{(3+2i)}{(2-4i)}\,\frac{(2+4i)}{(2+4i)} = -\frac{1}{10} + \frac{4}{5}i.$$

Convention

$\sqrt{-c} = \sqrt{c}\,i \quad$ pour $c > 0$.

Racines d'un polynôme de degré 2

- Le polynôme $ax^2 + bx + c$ possède les racines

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

même si $b^2 - 4ac < 0$.

- Si $z = \alpha + \beta i$, $\beta \neq 0$, est racine, alors $\overline{z} = \alpha - \beta i$ est aussi racine.

Théorème fondamental de l'algèbre

Soit $P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j$ un polynôme de degré n tel que $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \ldots, n$, et $c_n \neq 0$. Alors il existe n nombres complexes $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (possiblement identiques) tels que

$$P_n(x) = c_n(x - z_1)(x - z_2)\ldots(x - z_n).$$

Définition : forme polaire

La forme polaire d'un nombre complexe $z = a + bi$ est

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

où

- $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ est le module de z,
- θ est l'argument de z : il satisfait $\sin\theta = \frac{b}{r}$ et $\cos\theta = \frac{a}{r}$ et n'est pas unique.

Multiplication sous forme polaire

Si $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, alors

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

Formule de de Moivre

Si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, alors

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)).$$

Division sous forme polaire

Si $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, alors

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)) \quad \text{si } z_2 \neq 0.$$

Inverse sous forme polaire

Si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \neq 0$, alors

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta).$$

Racines d'un nombre complexe

Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ un nombre complexe. Quelles sont les racines n^e de z ?

- On cherche donc n nombres complexes $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ tels que $(w_k)^n = z$ pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$.
- Ces nombres sont :

$$w_k = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Définition : fonction exponentielle complexe

Soit z un nombre complexe. Alors

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Une propriété

Soit z_1 et z_2 des nombres complexes. Alors

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

Formule d'Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

On peut donc écrire

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}.$$

D'où

$$\ln z = \ln re^{i\theta} = \ln r + i\theta.$$