

MTH1101 : Sections 3 et 6, Automne 2022
École Polytechnique de Montréal
TD4

Exercice 1

- a. Trouver la série de MacLaurin de $f(x) = \ln(1 + 2x)$.
- b. Combien de termes de cette série sont nécessaires pour estimer $\ln(1.2)$ avec une erreur inférieure à 0.001 ?

Exercice 2

Que vaut

$$-\frac{8}{2!} + \frac{16}{3!} - \frac{32}{4!} + \frac{64}{5!} - \frac{128}{6!} + \frac{256}{7!} - \dots ?$$

Exercice 3

Trouver les valeurs de x qui vérifient l'équation

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 4

Calculer avec une précision de 10^{-7} l'intégrale ci-dessous :

$$\int_0^{\frac{1}{10}} \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

Exercice 5

Soit $f(x)$ une fonction ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}f(1) &= 1 \\f^{(n)}(1) &= \frac{n!}{3^n} \quad \forall n \geq 1 \\|f^{(n)}(x)| &\leq \frac{3(n!)}{2^{n+1}} \quad \forall n \geq 0 \quad \forall x \in [0, 2]\end{aligned}$$

En utilisant ces propriétés, répondre aux questions suivantes :

- Donner la série de Taylor $T(x)$ de $f(x)$ centrée en $a = 1$.
- Donner le rayon et l'intervalle de convergence de $T(x)$.
- Montrer que $f(x) = T(x)$ sur l'intervalle $[0, 2]$.
- Si on veut approximer $f(x)$ sur l'intervalle $[0, 2]$ par son polynôme de Taylor $T_n(x)$ de degré n , avec une erreur d'au plus 0.03, quel degré n doit-on choisir ?

Exercice 6

Dans ce problème, on cherche à estimer la valeur de π .

- Calculer la série de Taylor de $g(x) = \arctan(x)$ autour de 0.
- Quel est le rayon de convergence de cette série ?
- Est-ce que cette série converge en $x = 1$?
- Utiliser les résultats en a), b) et c) pour montrer que :

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \dots$$

Indice : $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

- Si on veut approximer π à l'aide de la série en d) avec une erreur d'au plus 0.01, combien de termes doit contenir la somme ?