

# Quelques classes particulières de graphes

Nous nous intéressons ici à des classes particulières de graphes pour lesquelles  $\chi(G)$ ,  $\omega(G)$ ,  $\theta(G)$  ou  $\alpha(G)$  peuvent être calculés en temps polynomial.

**Définition.** *Berge (1960)*

Un graphe est **parfait** si  $\chi(G') = \omega(G')$  pour tout sous-graphe induit  $G'$  de  $G$ .

**Théorème.** *Lovász (1972)*

un graphe  $G$  est parfait si et seulement si son complémentaire  $\overline{G}$  est parfait.

Ce résultat est demeuré une conjecture (proposée par Berge en 1960) durant 12 ans. On en déduit qu'un graphe est parfait si  $\theta(G') = \alpha(G')$  pour tout sous-graphe induit  $G'$  de  $G$

**Définition.** Un **trou** est un cycle impair élémentaire ayant au moins 5 sommets. Un **antitrou** est le graphe complémentaire d'un trou.

**Définition.** Un graphe  $G = (V, E)$  est **imparfait minimal** si  $G$  n'est pas parfait alors que  $G - u$  est parfait pour tout  $u \in V$ .

**Théorème.** *Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas (2002)*

un graphe  $G$  est parfait si et seulement si il ne contient aucun trou et aucun antitrou comme sous-graphe induit.

En d'autres termes, les seuls graphes imparfaits minimaux sont les trous et les antitrous. Ce théorème est demeuré une conjecture (proposée par Berge en 1960) durant 42 ans.

**Définition.** Deux sommets non adjacents dans  $G$  sont des amis si toutes les chaînes induites qui les relient ont un nombre pair d'arêtes.

**Théorème.** *Meyniel (1987)*

Un graphe imparfait minimal ne contient pas d'amis.

Il est clair que les trous n'ont pas d'amis. Pour les antitrous, il est facile d'observer que des sommets non adjacents sont forcément les extrémités d'une chaîne induite de 3 arêtes. On en déduit que les trous et les antitrous n'ont pas d'amis. Depuis 2002, on sait qu'il n'existe pas d'autre graphe minimal imparfait. Mais cette propriété des graphes minimaux imparfaits a permis de prouver la perfection de nombreux graphes. En effet, si on peut montrer que tous les sous-graphes induits  $G'$  d'un graphe connexe  $G$  autres que des cliques ont des amis, alors on sait qu'aucun sous-graphe induit de  $G$  est minimal imparfait, ce qui signifie que  $G$  est parfait. Par exemple :

- les graphes bipartis  $G = (V_1, V_2, E)$  sont parfaits car sans perte de généralité, on peut supposer  $|V_1| \geq |V_2|$  et  $G$  connexe. Si  $|V_1| = 1$ ,  $G$  est une clique ; sinon, toute paire de sommets dans  $V_1$  est une paire d'amis.
- les graphes parfaitement ordonnables sont parfaits. En effet, soit  $G$  un tel graphe autre qu'une clique et soit  $<$  un ordre parfait de ses sommets. Soit  $F$  l'ensemble des paires  $(x, y)$  de sommets non adjacents telles que  $x < y$  et il existe au moins un sommet  $w$  adjacent à  $x$  et  $y$ . Soit finalement  $(a, b)$  une paire minimale de  $F$  (c'est-à-dire une paire telle que pour tout  $(x, y) \in F$  on a  $a < x$  ou  $a = x$  et  $b < y$ ). Il n'est pas difficile de montrer que  $a$  et  $b$  sont des amis dans  $G$ .

En 1984, Groetschel, Lovász et Schrijver ont démontré qu'il est possible de déterminer  $\chi(G)$ ,  $\omega(G)$ ,  $\theta(G)$  et  $\alpha(G)$  en temps polynomial dans tout graphe parfait  $G$ , en résolvant un programme linéaire en variables continues. Leur algorithme, bien qu'intéressant en théorie, n'est pas très utile en pratique car il faut utiliser l'algorithme de l'ellipsoïde qui n'est pas très rapide. Ceci explique pourquoi de nombreux chercheurs se sont penchés sur des classes particulières de graphes parfaits.

Dans un article en 2006, Hougardy a répertorié 120 classes de graphes parfaits et a analysé les liens d'inclusion entre toutes ces classes. Nous n'en présenterons ici que quelques unes.

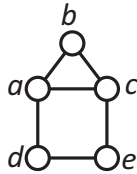
Nous avons déjà vu que si un ordre parfait  $v_1 < \dots < v_{|V|}$  est connu pour un **graphe parfaitement ordonnable**  $G$ , alors  $\chi(G)$  peut être obtenu en appliquant l'algorithme séquentiel de coloration basé sur cet ordre. Déterminer  $\omega(G)$  pour ces graphes n'est pas plus difficile. Il suffit d'appliquer l'algorithme suivant après avoir obtenu une coloration optimale. On obtient une clique de taille  $\omega(G) = \chi(G)$ .

Soit  $v$  un sommet coloré avec la couleur  $\chi(G)$ . Poser  $k \leftarrow \chi(G)$  et  $K \leftarrow \{v\}$ ;

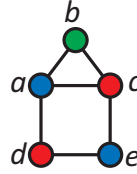
Tant que  $k > 1$  faire

Déterminer un sommet  $u$  de couleur  $k - 1$  et adjacent à tous les sommets de  $K$ ;

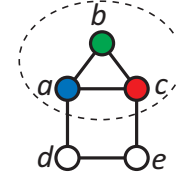
Poser  $k \leftarrow k - 1$  et  $K \leftarrow K \cup \{u\}$ .



Graphe  $G$



Coloration séquentielle avec l'ordre parfait  $a < c < b < d < e$  et bleu=1, rouge=2 et vert=3



Clique maximum

Remarquons que si on colore les sommets du graphe ci-dessus dans l'ordre  $b < c < a < e < d$  on obtient la même coloration, à l'exception que  $b$  est bleu (couleur 1) et  $a$  est vert (couleur 3). Bien que la coloration soit optimale, l'algorithme ci-dessus ne fonctionne plus car après avoir choisi le sommet  $a$  de couleur 3, on pourrait prendre le sommet  $d$  de couleur 2, et on ne pourrait plus grossir la clique pour en obtenir une de 3 sommets. La raison est que cet ordre n'est pas parfait puisque la chaîne  $[b, a, d, e]$  est telle que  $b < a$  et  $e < d$ .

**Propriété.** *Un graphe  $G$  ne contient aucune chaîne élémentaire de 4 sommets comme sous-graphe induit si et seulement si tel est le cas pour  $\overline{G}$ .*

**Corollaire.** *Si  $G$  ne contient aucune chaîne élémentaire de 4 sommets comme sous-graphe induit, alors  $\chi(G)$ ,  $\omega(G)$ ,  $\theta(G)$  et  $\alpha(G)$  peuvent être déterminés en temps polynomial.*

*Démonstration.* Tout ordre des sommets dans  $G$  et dans  $\overline{G}$  est parfait. □

Nous allons maintenant nous concentrer sur les **graphes triangulés** qui constituent une autre classe de graphes pour lesquels les quatre invariants  $\chi(G)$ ,  $\omega(G)$ ,  $\theta(G)$  et  $\alpha(G)$  peuvent être déterminés en temps polynomial. Il s'agit des graphes qui ne contiennent aucun cycle élémentaire de  $k \geq 4$  sommets comme sous-graphe induit.

**Définition.** *Étant donné un graphe connexe  $G = (V, E)$ , un sous-ensemble  $W \subseteq V$  de sommets est un séparateur si  $G[V \setminus W]$  n'est pas connexe.*

**Théorème.** *Un graphe connexe  $G = (V, E)$  est triangulé si et seulement si tout séparateur minimal (au sens de l'inclusion) est une clique.*

*Démonstration. Suffisance.* Supposons tout d'abord que tout séparateur minimal de  $G$  est une clique. Soit  $C = [u_1, \dots, u_k, u_1]$  ( $k \geq 4$ ) un cycle dans  $G$  et soit  $W$  un séparateur minimal de  $u_1$  et  $u_3$ .  $W$  doit contenir  $u_2$  et au moins un sommet  $u_i$  avec  $4 \leq i \leq k$ . Comme  $W$  est une clique, il existe donc une arête reliant  $u_2$  à  $u_i$ , ce qui signifie que  $C$  n'est pas un sous-graphe induit de  $G$ .

*Nécessité.* Supposons maintenant que  $G$  soit triangulé et soit  $W$  un séparateur minimal de  $G$ . Supposons que  $W$  ne soit pas une clique. Soient  $G_1 = (V_1, E_1)$  et  $G_2 = (V_2, E_2)$  deux composantes connexes de  $G[V \setminus W]$  et soient  $u$  et  $v$  deux sommets non adjacents dans  $W$ . Comme  $W$  est un séparateur minimal,  $u$  et  $v$  ont chacun au moins un voisin dans  $G_1$  et dans  $G_2$ . Soient  $a_1$  et  $a_2$  les voisins de  $u$  dans  $G_1$  et  $G_2$ , et soient  $b_1$  et  $b_2$  ceux de  $v$ . Comme  $G_1$  et  $G_2$  sont connexes, il existe une chaîne reliant  $a_1$  à  $b_1$  dans  $G_1$  et une chaîne reliant  $a_2$  à  $b_2$  dans  $G_2$  (chaque chaîne étant éventuellement réduite à un sommet). Il existe donc une chaîne  $C_1$  sans corde reliant  $u$  à  $v$  dans  $G[V_1 \cup W]$  ainsi qu'une chaîne sans corde  $C_2$  reliant  $u$  à  $v$  dans  $G[V_2 \cup W]$ . L'union de  $C_1$  et de  $C_2$  est alors un cycle sans corde contenant au moins 4 sommets, contradiction. □

**Définition.** Un sommet est **simplicial** si tous ses voisins sont adjacents.

**Théorème.** Si  $G = (V, E)$  est un graphe triangulé autre qu'une clique, alors  $G$  contient au moins deux sommets simpliciaux non adjacents.

*Démonstration.* Si  $|V| = 2$  alors  $G$  contient deux sommets isolés qui sont donc simpliciaux et non adjacents. Raisonnons donc par induction sur  $|V|$ . Soit  $W$  un séparateur minimal de  $G$  et  $G_1 = (V_1, E_1)$  et  $G_2 = (V_2, E_2)$  deux composantes connexes de  $G[V \setminus W]$ . On a vu que  $W$  est une clique.

- Si  $G[V_1 \cup W]$  est une clique, alors choisissons  $u \in V_1$ .
- Si  $G[V_1 \cup W]$  n'est pas une clique, il existe deux sommets simpliciaux non adjacents dans  $G[V_1 \cup W]$ , et on peut donc en choisir un dans  $V_1$ .

Clairement,  $u$  est simplicial dans  $G$ . De même, on peut choisir  $v$  dans  $V_2$  qui est simplicial dans  $G$ , et comme  $u$  et  $v$  sont non adjacents, ceci termine la preuve.  $\square$

**Définition.** Dans un graphe  $G$ , un **schéma d'élimination parfait** est un ordre  $v_1 < \dots < v_{|V|}$  de ses sommets tel que  $v_i$  est simplicial dans  $G[\{v_i, \dots, v_{|V|}\}]$ .

**Théorème.** Un graphe est triangulé si et seulement si il possède un schéma d'élimination parfait.

*Démonstration. Suffisance.* Soit  $v_1 < \dots < v_{|V|}$  un schéma d'élimination parfait d'un graphe  $G$  et soit  $C = [u_1, \dots, u_k, u_1]$  ( $k \geq 4$ ) un cycle dans  $G$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $u_1$  est le premier des sommets à apparaître dans le schéma d'élimination parfait. Mais cela signifie que  $u_2$  est relié à  $u_k$  par une arête, car ces deux sommets sont adjacents et non encore éliminés lorsque  $u_1$  est éliminé. Le cycle  $C$  n'est donc pas un sous-graphe induit de  $G$ .

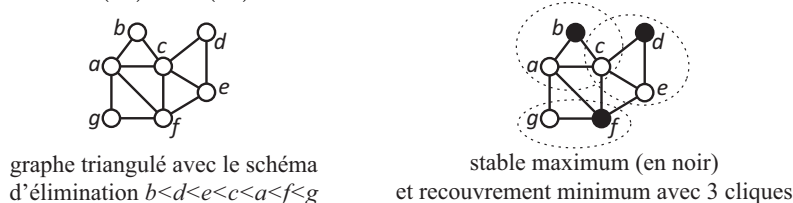
*Nécessité.* Si  $G$  est triangulé, on peut déterminer un schéma d'élimination parfait à l'aide de l'algorithme ci-dessous qui est basé sur le fait que  $G[V \setminus \{v_1, \dots, v_i\}]$  est triangulé pour tout  $i = 1, \dots, |V|$  (puisque'il s'agit d'un sous-graphe de  $G$ ), et contient donc au moins un sommet simplicial.

Pour $i = 1$ à $ V $ faire Choisir un sommet simplicial $v_i$ dans $G[V \setminus \{v_1, \dots, v_{i-1}\}]$ .	$\square$
--	-----------

Il est facile de déterminer un stable maximum et un recouvrement des sommets à l'aide d'un nombre minimum de cliques dans un graphe triangulé. L'algorithme glouton ci-dessous résout ces problèmes.

Déterminer un schéma d'élimination parfait $v_1 < \dots < v_{ V }$ et poser $k \leftarrow 0$ et $S \leftarrow \emptyset$ ; Pour $i = 1$ à $ V $ faire Si $v_i$ n'est adjacent à aucun sommet de $S$ alors Poser $S \leftarrow S \cup \{v_i\}$ , $k \leftarrow k + 1$ et $V_k \leftarrow \{v_i\} \cup \{v_j \text{ adjacents à } v_i \text{ avec } j > i\}$ .	
---	--

À la fin de l'algorithme,  $S$  est alors un stable de cardinalité  $k$  et on a un recouvrement des sommets de  $G$  à l'aide de  $k$  cliques  $V_1, \dots, V_k$ . On en déduit que  $\alpha(G) \geq k \geq \theta(G)$ , et comme  $\alpha(G) \leq \theta(G)$  pour tout graphe  $G$ , on a  $\alpha(G) = \theta(G) = k$ .



Il est également facile de déterminer  $\chi(G)$  et  $\omega(G)$  dans un graphe triangulé. On peut en effet utiliser les techniques vues pour les graphes parfaitement ordonnables puisque'un schéma d'élimination parfait est l'inverse d'un ordre parfait.

**Théorème.** Si  $v_1 < \dots < v_{|V|}$  est un schéma d'élimination parfait alors  $v_{|V|} < \dots < v_1$  est un ordre parfait.

*Démonstration.* Soit  $v_1 < \dots < v_{|V|}$  est un schéma d'élimination parfait et  $[a, b, c]$  une chaîne induite sur 3 sommets. Si  $b < a$  alors  $c < b$  car sinon  $b$  ne serait pas simplicial lors de son élimination. Donc, étant donnée une chaîne induite  $[a, b, c, d]$  telle que  $b < a$ , on a  $c < b$  qui implique  $d < c$ . En prenant l'ordre inverse, on a donc  $c < d$  lorsque  $a < b$ .  $\square$

Il existe plusieurs algorithmes permettant de déterminer si un graphe  $G = (V, E)$  est triangulé. Le plus naïf (Gross, 1969) consiste à tenter de construire un schéma d'élimination parfait. Si à un moment donné,  $G[V \setminus \{v_1, \dots, v_{i-1}\}]$  n'a pas de sommet simplicial, c'est qu'il n'est pas triangulé, et donc  $G$  non plus. Par contre, si l'algorithme réussit à construire un schéma d'élimination parfait, c'est que  $G$  est triangulé. Il existe cependant des algorithmes plus efficaces, par exemple celui de Tarjan (1979) que nous décrivons ci-dessous, sans justifier sa validité.

1. Poser  $W \leftarrow V$  ;
2. Si  $W = \emptyset$  STOP :  $G$  est triangulé ;  
Sinon choisir le sommet  $u \in W$  ayant le plus de voisins dans  $V \setminus W$  ;
3. Si les voisins de  $u$  dans  $V \setminus W$  ne forment pas une clique alors STOP :  $G$  n'est pas triangulé ;  
Sinon poser  $W \leftarrow W \setminus \{u\}$  et retourner à 2.

De tels algorithmes de reconnaissances sont importants car ils permettent de savoir si on peut appliquer les algorithmes simples susmentionnés pour déterminer  $\alpha(G)$ ,  $\theta(G)$ ,  $\chi(G)$  ou  $\omega(G)$ . Pour comparaison, le meilleur algorithme connu pour la reconnaissance des graphes parfaits est en  $O(|V|^9)$  alors que celui de Tarjan pour les graphes triangulés est en  $O(|V| + |E|)$ .

Passons à une autre classe de graphes, celles des **graphes de comparabilité**. Il s'agit des graphes qu'il est possible d'orienter de manière transitive, c'est-à-dire telle qu'on a  $(u, w)$  quand on a  $(u, v)$  et  $(v, w)$ . On peut reconnaître ces graphes facilement à l'aide de l'algorithme de propagation suivant qui, étant donné un graphe non orienté  $G = (V, E)$ , tente de lui attribuer une orientation transitive.

- Poser  $A \leftarrow \emptyset$ .  
Tant que  $|E| \neq \emptyset$  faire
1. Choisir  $[u, v] \in E$  et poser  $E \leftarrow E \setminus \{[u, v]\}$  et  $A \leftarrow A \cup \{(u, v)\}$  ;
  2. S'il existe  $(u, v) \in A$ ,  $(v, w) \in A$  et  $[u, w] \in E$  faire  
 $E \leftarrow E \setminus \{[u, w]\}$  et  $A \leftarrow A \cup \{(u, w)\}$  et retourner à 2. ;
  3. S'il existe  $(u, v) \in A$  et  $[v, w] \in E$  tel que  $[u, w] \notin E$ ,  $(u, w) \notin A$  et  $(w, u) \notin A$  alors  
 $E \leftarrow E \setminus \{[v, w]\}$  et  $A \leftarrow A \cup \{(w, v)\}$  et retourner à 2. ;
  4. S'il existe  $(v, u) \in A$  et  $[v, w] \in E$  tel que  $[u, w] \notin E$ ,  $(u, w) \notin A$  et  $(w, u) \notin A$  alors  
 $E \leftarrow E \setminus \{[v, w]\}$  et  $A \leftarrow A \cup \{(v, w)\}$  et retourner à 2. ;
  5. S'il existe  $(u, v) \in A$  et  $(v, w) \in A$  tel que  $[u, w] \notin E$ ,  $(u, w) \notin A$  et  $(w, u) \notin A$  alors  
STOP  $G$  n'est pas de comparabilité ;
  6. S'il existe  $(u, v) \in A$ ,  $(v, w) \in A$  et  $(w, u) \in A$  alors  
STOP  $G$  n'est pas de comparabilité.

**Théorème.** *Les graphes de comparabilité sont parfaitement ordonnables.*

*Démonstration.* Soit  $G = (V, E)$  un graphe de comparabilité. Considérons une orientation transitive de ses arêtes, ce qui donne un graphe orienté  $(V, A)$ . Créons un ordre de ses sommets comme suit :

- Poser  $L \leftarrow \emptyset$  et  $V' \leftarrow V$  ;  
Tant que  $V' \neq \emptyset$  faire  
Déterminer l'ensemble  $W$  des sommets de  $G[V']$  qui n'ont pas de prédécesseurs ;  
Poser  $V' \leftarrow V' \setminus W$  et rajouter les sommets de  $W$  en fin de liste  $L$ .

La liste  $L$  produite par cet algorithme est une liste ordonnée des sommets de  $G$  qui correspond à un ordre parfait. En effet, considérons une chaîne induite  $[a, b, c, d]$  dans  $G$  telle que  $a < b$ . On a donc  $(a, b) \in A$ . Comme  $[b, c] \in E$  et  $[a, c] \notin E$ , on a  $(c, b) \in A$ . Comme  $[c, d] \in E$  et  $[b, d] \notin E$ , on a  $(c, d) \in A$ , ce qui signifie que  $c < d$ .  $\square$

On peut donc facilement déterminer  $\chi(G)$  et  $\omega(G)$  si  $G$  est de comparabilité. Pour ce qui est de  $\theta(G)$  et  $\alpha(G)$ , ce sont également des invariants faciles à calculer puisque Dilworth (1950) a montré que dans un graphe de comparabilité  $G = (V, E)$ , la taille maximale d'un stable (antichaîne) est égale au nombre minimum de cliques (chaînes) nécessaires pour recouvrir  $V$ . Ces valeurs peuvent être obtenues à l'aide d'algorithmes de flots.

Une classe de graphes rencontrée fréquemment en pratique est celle des **graphes d'intervalles**. Étant donné un ensemble  $\mathcal{I} = \{I_1, \dots, I_n\}$  d'intervalles sur une droite, on peut associer un graphe  $G = (V, E)$  où  $V = \{1, \dots, n\}$  et deux sommets  $i$  et  $j$  sont reliés par une arête si et seulement si  $I_i \cap I_j \neq \emptyset$ . Le complémentaire  $\overline{G}$  d'un graphe d'intervalles est un graphe de comparabilité puisqu'on peut ordonner les sommets de  $\overline{G}$  de manière transitive, en créant un arc  $(i, j)$  si  $I_i \cap I_j = \emptyset$  et  $I_i$  apparaît avant  $I_j$  sur la droite. En fait, il existe une caractérisation des graphes d'intervalles.

**Théorème.** *Un graphe  $G$  est d'intervalles si et seulement si  $\overline{G}$  est de comparabilité et  $G$  ne contient pas de cycle induit à 4 sommets.*

**Propriété.** *Les graphes d'intervalles sont triangulés.*

Cette propriété découle du fait que le temps est linéaire et non cyclique. On en déduit facile de déterminer  $\alpha(G)$ ,  $\theta(G)$ ,  $\chi(G)$  et  $\omega(G)$  dans de tels graphes.

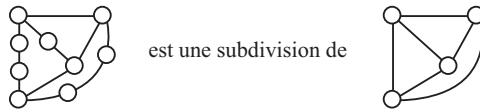
Nous terminons ce chapitre par quelques propriétés concernant les **graphes planaires**, c'est-à-dire les graphes qu'on peut représenter sur le plan de telle sorte que leurs arêtes ne se croisent pas.

**Propriété.** *Si  $G = (V, E)$  est un graphe planaire connexe alors  $|E| \leq 3|V| - 6$ . De plus, si  $G$  est biparti, alors  $|E| \leq 2|V| - 4$ .*

*Démonstration.*  $G$  a  $|E| - |V| + 2$  faces, en comptant la face infinie. Le pourtour de chaque face a au moins 3 arêtes. En sommant les nombres d'arêtes des pourtours des faces on compte chaque arête deux fois et on obtient donc  $2|E| \geq 3(|E| - |V| + 2)$ , ce qui est équivalent à  $|E| \leq 3|V| - 6$ . Si  $G$  est biparti, chaque face a au moins 4 arêtes, ce qui donne  $2|E| \geq 4(|E| - |V| + 2)$ , et donc  $|E| \leq 2|V| - 4$ . □

On en déduit que la clique à 5 sommets, qu'on note  $K_5$  n'est pas planaire puisqu'elle contient 10 arêtes et  $10 > 3(5) - 6 = 9$ . De même, le graphe biparti complet  $G = (V_1, V_2, E)$  avec  $|V_1| = |V_2| = 3$  et une arête reliant chaque sommet de  $V_1$  à chaque sommet de  $V_2$  n'est pas planaire. En effet, ce graphe qu'on note  $K_{3,3}$  contient 9 arêtes et  $9 > 2(6) - 4 = 8$ .

**Définition.** *Un graphe  $G'$  est une subdivision de  $G$  s'il est obtenu à partir de  $G$  en rajoutant des sommets sur des arêtes.*



**Théorème.** *Kuratowski (1930)*

*Un graphe est planaire si et seulement si il ne contient aucune subdivision de  $K_5$  ni de  $K_{3,3}$  comme sous-graphe partiel.*

Considérons par exemple le graphe  $G$  obtenu à partir de  $K_{3,3}$  en rajoutant un sommet sur chacune des 9 arêtes. Ce graphe est biparti car on peut mettre ces 9 nouveaux sommets d'un côté du biparti, et les 6 de  $K_{3,3}$  de l'autre. Son nombre d'arêtes est 18 et son nombre de sommets 15. On a donc  $18 < 26 = 2(15) - 4$ . Le comptage du nombre d'arêtes n'est donc pas suffisant pour conclure que  $G$  n'est pas planaire. Le théorème ci-dessus permet d'arriver à cette conclusion.

Si on connaît un cycle hamiltonien dans un graphe  $G$ , on peut tester la planarité de  $G$  très facilement. En effet, Soit  $E'$  l'ensemble des arêtes de  $G$  ne faisant pas partie du cycle hamiltonien. Construisons un graphe  $H = (E', F)$  tel que deux sommets  $e$  et  $e'$  sont reliés par une arête si et seulement si  $e$  et  $e'$  sont deux cordes du cycle hamiltonien qui « se coupent », c'est-à-dire que l'une d'elle doit être à l'intérieur du cycle et l'autre à l'extérieur si on veut éviter les croisements. On a alors que  $G$  est planaire si et seulement si  $H$  est biparti.

**Définition.** *Une représentation topologique d'un graphe planaire  $G$  est un dessin de  $G$  dans lequel les arêtes de  $G$  ne se croisent pas.*

**Définition.** *Le graphe dual  $D(G)$  d'une représentation topologique d'un graphe planaire  $G$  est le graphe dont les sommets correspondent aux faces de  $G$ , et dans lequel deux sommets sont reliés par une arête si et seulement si les faces correspondantes dans  $G$  ont une arête en commun.*

Notons qu'un graphe planaire peut avoir plusieurs duaux non isomorphes puisque ceux-ci dépendent de la représentation topologique choisie. Par exemple, les deux graphes ci-dessous sont deux représentations topologiques d'un même graphe planaire. Le dual de celui de gauche a un sommet (correspondant à la face extérieure) de degré 6 alors que le degré maximum dans le dual de celui de droite est 5.



Dans le dual  $D(G)$  d'une représentation topologique d'un graphe planaire  $G$ , on a que chaque arête de  $G$  correspond à une arête de  $D(G)$ , chaque cycle de  $G$  correspond à un cocycle de  $D(G)$ , et chaque cocycle de  $G$  correspond à un cycle de  $D(G)$ .

**Propriété.** Si  $G$  est planaire connexe, alors  $D(D(G)) = G$  pour toute représentation topologique de  $G$ .

Colorer les sommets de  $G$  est équivalent à colorer les faces du dual  $D(G)$  d'une représentation topologique de  $G$ . Considérons donc une représentation topologique d'un graphe planaire  $G$ . Soit  $G'$  le graphe obtenu en rajoutant éventuellement des arêtes dans cette représentation de telle sorte que toutes les faces de  $G'$  soient des triangles. Clairement,  $\chi(G') \geq \chi(G)$ . Le dual  $D(G')$  a donc tous ses sommets de degré 3. Nous allons maintenant montrer que  $q(D(G')) = 3$  si et seulement si les faces de  $D(G')$  peuvent être colorées en 4 couleurs, ce qui revient à dire que les sommets de  $G'$ , et donc aussi ceux de  $G$  peuvent être colorés en 4 couleurs. La démonstration du théorème des 4 couleurs (qui dit que  $\chi(G) \leq 4$  pour tout graphe planaire  $G$ ) revient donc à prouver que les arêtes de  $D(G')$  sont colorables en  $\Delta(D(G')) = 3$  couleurs.

- Supposons que les faces de  $D(G')$  soient colorées en 4 couleurs que nous coderons par  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  et  $(1, 1)$ . Considérons une arête quelconque  $e$  de  $D(G')$ . Cette arête sépare 2 faces de couleur  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$ . Colorons  $e$  avec la couleur  $((x_1 + x_2) \bmod 2, (y_1 + y_2) \bmod 2)$ . En faisant de même pour toutes les arêtes, on obtiendra une coloration des arêtes avec les 3 couleurs  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  et  $(1, 1)$  (la couleur  $(0, 0)$  ne pouvant pas exister car une arête séparerait 2 faces de même couleur). De plus, deux arêtes adjacentes sont de couleur différente. En effet, soient  $e = (u, v_1)$  et  $e' = (u, v_2)$ . Il existe alors  $e'' = (u, v_3)$  puisque le degré de chaque sommet dans  $D(G')$  est 3. Ces 3 arêtes séparent 3 faces de couleur  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  et  $(x_3, y_3)$ . Par définition, les trois arêtes  $e, e'$  et  $e''$  ont des couleurs différentes puisque  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  et  $(x_3, y_3)$  sont tous différents.
- Supposons que les arêtes de  $D(G')$  soient colorées en 3 couleurs  $a, b, c$ . Soit  $D_{ab}$  le graphe partiel de  $D(G')$  ne contenant que les arêtes de couleur  $a$  ou  $b$ , et  $D_{bc}$  celui ne contenant que les arêtes de couleur  $b$  ou  $c$ . Comme  $D_{ab}$  est une union de cycles pairs disjoints, on peut colorer ses faces en 2 couleurs 0 et 1. On peut faire de même avec  $D_{bc}$ . Chaque face de  $D(G')$  fait partie d'une face  $f_{ab}$  de  $D_{ab}$  de couleur  $c_{ab} \in \{0, 1\}$  et d'une face  $f_{bc}$  de couleur  $c_{bc} \in \{0, 1\}$  de  $D_{bc}$ . Donnons à  $f$  la couleur  $(c_{ab}, c_{bc})$ . On obtient ainsi une coloration des faces de  $D(G')$  en 4 couleurs  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  et  $(1, 1)$ . Soient  $f$  et  $f'$  deux faces adjacentes dans  $D(G')$ . Elles sont séparées par une arête qui fait partie de  $D_{ab}$  ou/et de  $D_{bc}$ . Les couleurs de  $f$  et de  $f'$  diffèrent donc par au moins une composante.

