

## Couplages et colorations d'arêtes

Complément au chapitre 5 « Une employée mécontente »  
et au chapitre 9 « L'apprentie sudokiste »

Considérons  $n$  équipes de hockey qui doivent s'affronter lors d'un tournoi. Supposons que chaque équipe doive rencontrer chaque autre équipe exactement une fois. On peut tout d'abord se demander quel est le nombre maximum de rencontres qui peuvent avoir lieu chaque jour sachant qu'aucune équipe ne peut jouer deux matchs le même jour.

La réponse est simple : si  $n$  est pair, alors  $n/2$  rencontres peuvent avoir lieu le même jour; si  $n$  est impair, ce nombre est réduit à  $(n-1)/2$ , ce qui veut dire qu'au moins une équipe ne joue pas chaque jour.

En termes de graphe, on peut créer un sommet par équipe et relier chaque paire de sommets par une arête. Les arêtes correspondent donc aux rencontres qui doivent être planifiées. La question posée ci-dessus revient alors à se demander quel est le nombre maximum d'arêtes que l'on peut choisir dans le graphe sans que deux arêtes choisies aient des extrémités en commun. Ce que l'on recherche s'appelle en fait un *couplage* avec un nombre maximum d'arêtes.

### Définition

Un « couplage » dans un graphe est un ensemble d'arêtes n'ayant aucune extrémité en commun.

On peut également se demander quel est le nombre minimum de jours nécessaires pour que toutes les rencontres puissent avoir lieu. Étant donné que chaque équipe rencontre chaque autre équipe exactement une fois, il s'agit de planifier  $n(n-1)/2$  matchs.

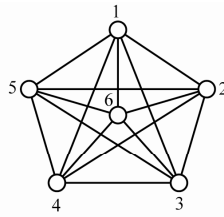
- Si  $n$  est pair, nous avons vu qu'un maximum de  $n/2$  matchs peuvent avoir lieu chaque jour, et au moins  $n-1$  jours sont donc nécessaires pour que tous les matchs puissent être joués.
- Si  $n$  est impair, nous avons vu qu'un maximum de  $(n-1)/2$  match peuvent avoir lieu chaque jour, ce qui nécessite donc au moins  $n$  jours pour l'ensemble des matchs.

En termes de graphes, nous désirons donc colorer les arêtes du graphe en utilisant aussi peu de couleurs que possible et de telle sorte que chaque couleur corresponde à un couplage. En d'autres termes, on associe une couleur par jour.

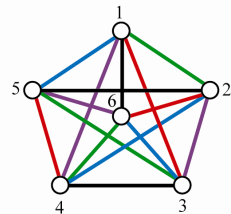
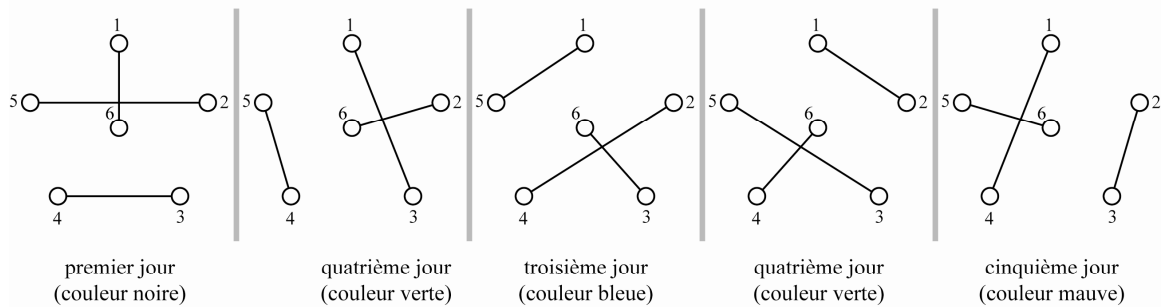
Il est en fait facile de planifier tous les  $n(n-1)/2$  matchs en  $n-1$  jours lorsque  $n$  est pair. On peut s'y prendre comme suit. Numérotions les sommets de 1 à  $n$  pour représenter les  $n$  équipes. Dessinons le graphe mentionné ci-dessus en mettant le sommet  $n$  au centre et les autres sommets en cercle autour du sommet  $n$ .

- Le premier jour, on organise une rencontre entre les équipe 1 et  $n$ , 2 et  $n-1$ , 3 et  $n-2$ , et ainsi de suite jusqu'à la rencontre entre  $n/2$  et  $n/2+1$ .
- Les jours suivants, on reproduit ce qui s'est produit le jour précédent, en faisant simplement une rotation du couplage dans le sens des aiguilles d'une montre.

Comme un dessin vaut mieux que de longues explications, voici une illustration de cette construction pour un ensemble de  $n=6$  équipes.



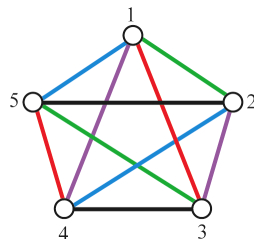
les 15 arêtes correspondent au 15 matchs à planifier



horaire complet en 5 jours.

Le cas où  $n$  est impair est maintenant facile à planifier également. En effet, il suffit de rajouter une équipe fictive qu'on notera  $n+1$ . Lorsqu'une équipe joue contre l'équipe  $n+1$ , cela veut simplement dire que l'équipe est au repos. On a alors un horaire à construire avec  $n+1$  pair, ce qui nécessite  $(n+1)-1$  jours, c'est-à-dire  $n$  jours. On a vu qu'on ne peut pas faire mieux. Pour obtenir le calendrier des matchs pour les  $n$  équipes, il suffit alors simplement d'ôter tout ce qui concerne l'équipe fictive  $n+1$ .

Par exemple, si le tournoi comporte  $n=5$  équipes, on rajoute une 6<sup>e</sup> équipe fictive et on construit l'horaire décrit ci-dessus. On efface ensuite tout ce qui concerne l'équipe 6 pour obtenir l'horaire suivant en cinq jours pour les 5 équipes.



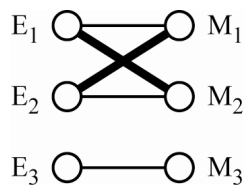
Les couplages et les colorations d'arêtes interviennent dans bien d'autres contextes. Supposons par exemple que l'on doive réaliser 5 tâches  $T_1, T_2, T_3, T_4$  et  $T_5$ , chacune de ces tâches ayant une durée d'une journée. Les tâches  $T_1$  et  $T_2$  doivent être réalisées par l'employé  $E_1$ , les tâches  $T_3$  et  $T_4$  par l'employé  $E_2$  et la tâche  $T_5$  par l'employé  $E_3$ . Les tâches  $T_1$  et  $T_3$  requièrent la machine  $M_1$ , les tâches  $T_2$  et  $T_4$  la machine  $M_2$  et la tâche  $T_5$  la machine  $M_3$ . Sachant que chaque employé ne peut réaliser qu'une tâche à la fois et que chaque machine ne peut être utilisée que par un employé à la fois,

- combien de tâches peut-on faire au maximum en une journée ?
- combien de jours faut-il au minimum pour réaliser ces 5 tâches ?

On peut bien sûr généraliser ce problème à un nombre quelconque de tâches, d'employés et de machines.

Ces deux problèmes peuvent être modélisés à l'aide d'un graphe. Les sommets sont les employés  $E_1, E_2$  et  $E_3$  ainsi que les machines  $M_1, M_2$  et  $M_3$ . On relie ensuite un sommet  $E_i$  à une machine  $M_j$  si une tâche requiert l'employé  $E_i$  et la machine  $M_j$ . Les 5 tâches de notre exemple sont donc représentées à l'aide de 5 arêtes. Pour répondre à la première question, il suffit donc de déterminer un couplage ayant un maximum d'arêtes dans ce graphe. Dans notre exemple, le plus grand couplage comporte trois arêtes. On peut choisir  $[E_1, M_1], [E_2, M_2]$  et  $[E_3, M_3]$ , ce qui correspond aux tâches  $T_1, T_4$  et  $T_5$ . On aurait aussi pu choisir  $[E_1, M_2], [E_2, M_1]$  et  $[E_3, M_3]$ , ce qui aurait correspondu aux tâches  $T_2, T_3$  et  $T_5$ .

Le deuxième problème est équivalent à une coloration des arêtes du même graphe à l'aide d'un nombre minimum de couleurs, de telle sorte que les arêtes qui se touchent aient des couleurs différentes. Chaque couleur doit donc correspondre à un couplage (pas nécessairement maximum) et représente ce qui sera effectué un jour donné. Dans notre exemple, il faut 2 jours pour réaliser les 5 tâches. Par exemple, on peut faire les tâches  $T_1, T_4$  et  $T_5$  le 1<sup>er</sup> jour (arêtes en trait fin) et les tâches  $T_2$  et  $T_3$  le 2<sup>ème</sup> jour (arêtes en traits épais)

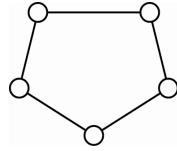


### ***Définition***

Une coloration des arêtes d'un graphe  $G$  est une affectation de couleurs aux arêtes telle que les arêtes ayant une extrémité en commun sont de couleur différente. On cherche généralement à déterminer une coloration utilisant aussi peu de couleurs que possible. Le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorer les arêtes d'un graphe  $G$  s'appelle « l'indice chromatique » de  $G$  et est noté  $q(G)$ .

Notons  $\Delta(G)$  le plus grand degré d'un sommet dans  $G$ . Étant donné que toutes les arêtes incidentes à un même sommet doivent avoir des couleurs différentes, il est clair que l'indice chromatique  $q(G)$  de  $G$  ne peut pas être inférieur à  $\Delta(G)$ . Il se peut par contre que

$q(G)$  soit strictement supérieur à  $\Delta(G)$ . Par exemple, les arêtes du pentagone ci-dessous ne peuvent pas être colorées en moins de 3 couleurs alors que  $\Delta(G)=2$ .



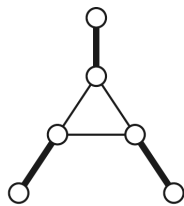
En 1964, Vizing a démontré que l'indice chromatique  $q(G)$  n'est jamais beaucoup plus grand que le plus grand degré  $\Delta(G)$ .

***Théorème (Vizing)***

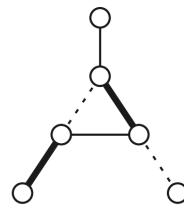
Les inégalités suivantes sont valides pour tout graphe  $G$  :  $\Delta(G) \leq q(G) \leq \Delta(G)+1$ .

Vizing a même donné une procédure qui permet de déterminer une coloration des arêtes de  $G$  en  $\Delta(G)+1$  couleurs. Son algorithme se trompe donc éventuellement d'une unité sur l'indice chromatique, ce qui n'est pas énorme. Il est par contre très difficile de savoir si  $q(G)$  vaut  $\Delta(G)$  ou  $\Delta(G)+1$  lorsque  $G$  n'a aucune propriété particulière.

Pour tenter de déterminer  $q(G)$ , on pourrait par exemple déterminer un premier couplage avec un maximum d'arêtes dans  $G$ , donner une couleur à ce couplage et l'ôter du graphe. En répétant ce processus, on aura coloré toutes les arêtes du graphe et on espère avoir utilisé aussi peu de couleurs que possible puisqu'on recherche à chaque étape le plus grand nombre d'arêtes pouvant recevoir la même couleur. Cette façon de faire ne colore cependant pas toujours  $G$  en  $q(G)$  couleurs. Par exemple, dans le graphe ci-dessous, le plus grand couplage contient 3 arêtes : il s'agit des 3 arêtes qui touchent les sommets de degré 1. En donnant la même couleur à ces 3 arêtes, il reste encore le triangle à colorer qui nécessite 3 nouvelles couleurs puisque les 3 arêtes ont des extrémités en commun. La procédure décrite ci-dessus donne donc un total de 4 couleurs alors que l'indice chromatique  $q(G)$  vaut 3 tel qu'illustré ci-dessous avec les traits simples, en gras et en pointillé.



graphe dont le plus grand couplage comporte 3 arêtes (en gras)



l'indice chromatique  $q(G)$  vaut 3

Dans certains cas, il est cependant facile de savoir si  $q(G)=\Delta(G)$  ou  $\Delta(G)+1$ . C'est par exemple le cas des graphes complets auxquels il ne manque aucune arête.

***Définition***

Un graphe  $G$  est « complet » s'il existe une arête entre toute paire de sommets.

Au début de ce chapitre, nous avons vu que la planification d'un tournoi entre  $n$  équipes est équivalente à colorer un les arêtes d'un graphe complet à  $n$  sommets. Nous avons vu

que  $n-1$  jours sont suffisants si  $n$  est pair, alors que  $n$  jours sont suffisants si  $n$  est impair. Formellement, nous avons donc la propriété suivante.

**Propriété**

Soit  $G$  un graphe complet avec  $n$  sommet. Alors

- $q(G) = \Delta(G) = n-1$  si  $n$  est pair
- $q(G) = \Delta(G)+1 = n$  si  $n$  est impair

Un autre cas facile est celui où il existe une partition des sommets du graphe en 2 ensembles  $V_1$  et  $V_2$  tel que chaque arête du graphe a exactement une extrémité dans  $V_1$  et l'autre dans  $V_2$ .

**Définition**

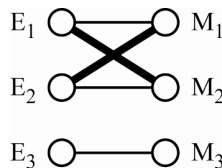
Un graphe  $G$  est « biparti » s'il existe une partition  $(V_1, V_2)$  de ses sommets tel que chaque arête de  $G$  a une extrémité dans  $V_1$  et l'autre dans  $V_2$ .

L'exemple de planification des tâches que nous avons vu plus haut consiste à colorer les arêtes d'un graphe biparti. En effet, la partition des sommets est simple : on peut mettre les employés dans l'ensemble  $V_1$  et les machines dans l'ensemble  $V_2$ . Les arêtes qui représentent les tâches relient toujours un employé à une machine.

**Propriété**

Si  $G$  est un graphe biparti, alors  $q(G) = \Delta(G)$

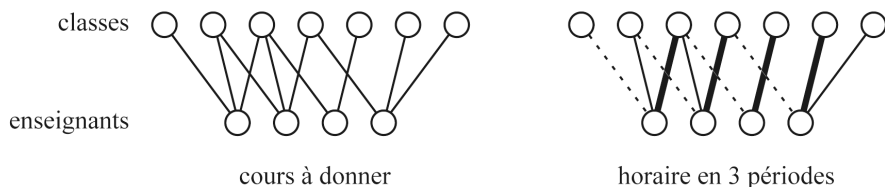
Dans le graphe des cinq tâches que nous reproduisons ici, le plus grand degré est atteint par les sommets  $E_1, E_2, M_1$  et  $M_2$  et il vaut 2. L'indice chromatique est donc 2, ce que nous avons représenté à l'aide des traits simples et épais.



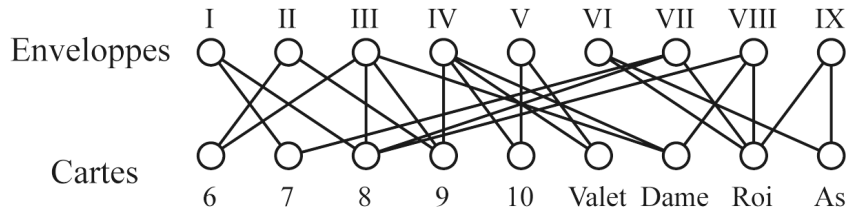
**Autre exemple**

Dans un Cégep de Montréal,  $n$  enseignants doivent donner des cours à  $m$  classes. Chaque arête du graphe de gauche ci-dessous correspond à un cours à donner. Sachant qu'un enseignant ne peut pas donner deux cours en même temps et qu'une classe ne peut pas suivre deux cours simultanément, combien de périodes faut-il prévoir dans la grille horaire pour que tous les cours puissent être donnés ?

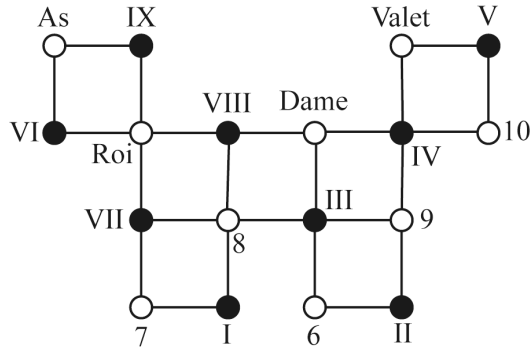
C'est un problème de coloration des arêtes d'un graphe biparti. Le nombre de périodes à prévoir est donc  $q(G)=\Delta(G)$ . Dans notre cas, ce nombre vaut 3 et un horaire en 3 couleurs est représenté à droite avec les traits épais, simples et en pointillé.



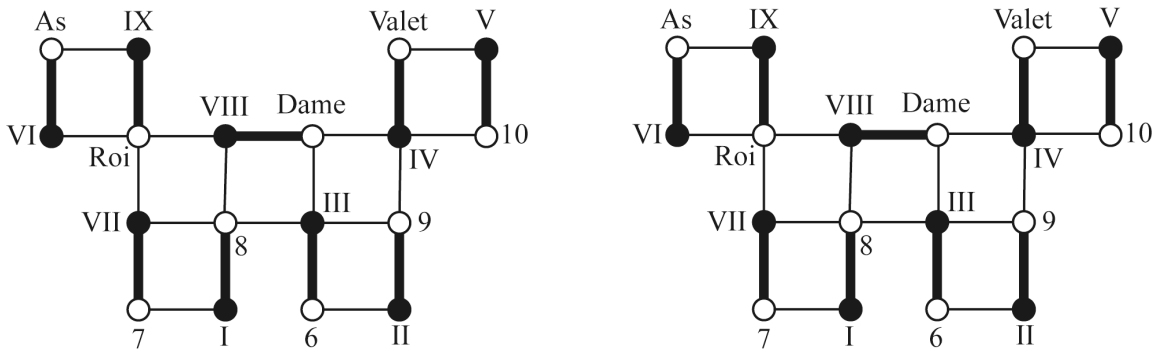
Revenons quelques instants à notre agrapheur, l'inspecteur Manori. Pour que Cindy retrouve son sourire, il lui fait un tour de magie dans lequel il s'agit de mettre 9 cartes dans 9 enveloppes. Chaque enveloppe ne peut contenir qu'une des cartes autorisées par Manori. La situation est représentée à l'aide du graphe biparti suivant dans lequel il s'agit de déterminer un couplage qui touche tous les sommets.



En déplaçant les sommets pour éviter les croisements d'arêtes, Manori réussit à donner la représentation suivante du même graphe, avec la bipartition représentée cette fois-ci à l'aide des couleurs noires et blanches sur les sommets, le noir pour les enveloppes et le blanc pour les cartes.

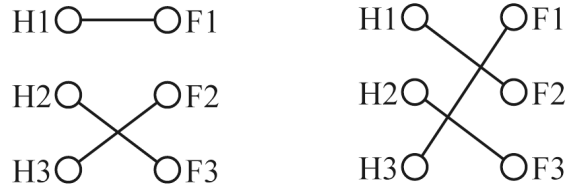


Manori démontre à Cindy que tout couplage à 9 arêtes dans ce graphe contient nécessairement l'arête reliant le sommet VIII au sommet Dame. Il lui montre deux de ces couplages.



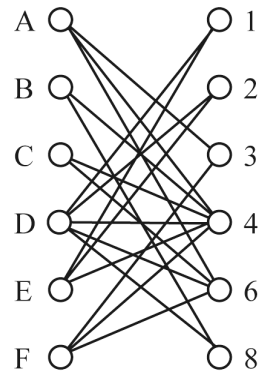
Avant de rencontrer Cindy, Manori a une grande discussion avec Despontin durant laquelle ils parlent de mariages stables. Un ensemble de  $n$  mariages entre  $n$  hommes et  $n$  femmes est à nouveau un couplage dans un graphe biparti avec les hommes dans  $V_1$  et les

femmes dans  $V_2$ . Voici deux exemples de couplages qu'il donne pour 3 hommes et 3 femmes.



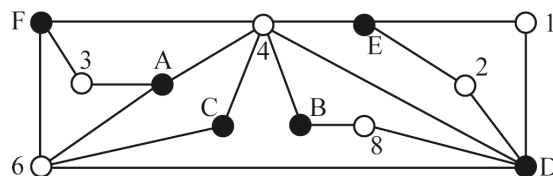
Nous terminons ce chapitre par la deuxième grille de sudoku que la jeune Lei demande à Manori de compléter. Pour parvenir à ses fins, Manori choisit 6 cases particulières dans la grille et constate que celles-ci ne peuvent contenir que les chiffres 1, 2, 3, 4, 6 et 8. Il construit alors un graphe biparti avec les cases comme premier ensemble  $V_1$  de sommets et les chiffres disponibles comme deuxième ensemble  $V_2$  de sommets. Il relie un sommet de  $V_1$  à un sommet de  $V_2$  si le chiffre de  $V_2$  peut être placé dans la case de  $V_1$ . Il obtient le graphe suivant.

	2	A	9				8	
9		B				6		3
1	7	C	8		3			
		5						
7	3	D						
	9	E		8				6
		F		2	7	1	9	8



Pour compléter ces 6 cases il faut donc déterminer un couplage dans ce graphe biparti puisque chaque case ne peut contenir qu'un des 6 chiffres et chaque chiffre ne peut aller que dans l'une des 6 cases (car elles sont toutes sur une même colonne).

Pour avoir une meilleure vision des choses, Manori décide de déplacer un peu les sommets et de les redessiner de telle sorte qu'il n'y ait plus de croisement d'arêtes. Il obtient la nouvelle représentation suivante dans laquelle les cases de  $V_1$  ont la couleur noire et les chiffres de  $V_2$  à placer dans ces 6 cases ont la couleur blanche.



On voit bien que ce graphe est biparti puisqu'il n'existe aucune arête reliant deux sommets blancs ou deux sommets noirs. Ce graphe est d'ailleurs également planaire topologique puisqu'aucune arête ne se croise.

Manori constate alors que tous les couplages à 6 arêtes dans ce graphe biparti contiennent nécessairement l'arête reliant B à 8, ce qui signifie qu'on ne peut placer que le chiffre 8 dans la case B.