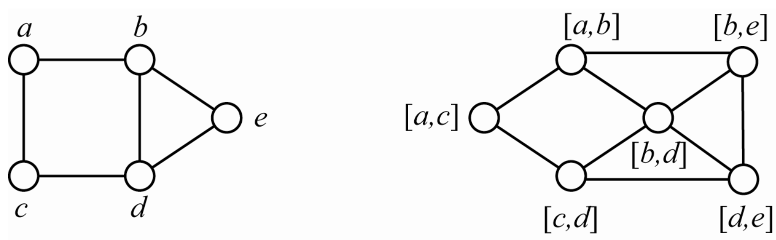
Les graphes de ligne

Complément au chapitre 4 « La course à l'héritage »

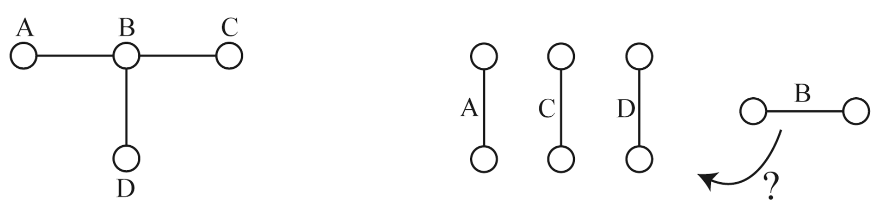
Étant donné un graphe G, on peut lui associer un nouveau graphe H qu'on note aussi L(G) et qui s'appelle le *graphe de ligne* de G. Un tel graphe est obtenu en associant un sommet à chaque arête de G et en reliant deux sommets dans H=L(G) si et seulement si les arêtes correspondantes dans G ont une extrémité en commun.

Dans l'exemple ci-dessous, le graphe G contient 6 arêtes, ce qui signifie que L(G) contient 6 sommets. Les sommets [*a*,*b*] et [*a*,*c*] sont relies entre eux par une arête dans L(G) puisque les arêtes correspondantes dans G ont le sommet *a* en commun. Par contre, il n'existe aucune arête reliant les sommets [*a*,*c*] et [*b*,*e*] dans L(G) car ces deux arêtes de G n'ont aucune extrémité en commun.



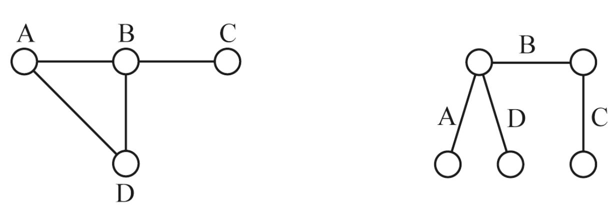
un graphe G — son graphe de ligne L(G)

Il existe des graphes qui ne sont pas de ligne. Par exemple, le graphe H ci-dessous n'est pas de ligne car si tel était le cas, il devrait exister un graphe G tel que H=L(G) et on devrait donc avoir 3 arêtes A, C et D dans G n'ayant aucune extrémité en commun et une quatrième arête B dans G ayant une extrémité en commun avec les arêtes A, C et D, ce qui est bien sûr impossible puisque chaque arête n'a que deux extrémités.



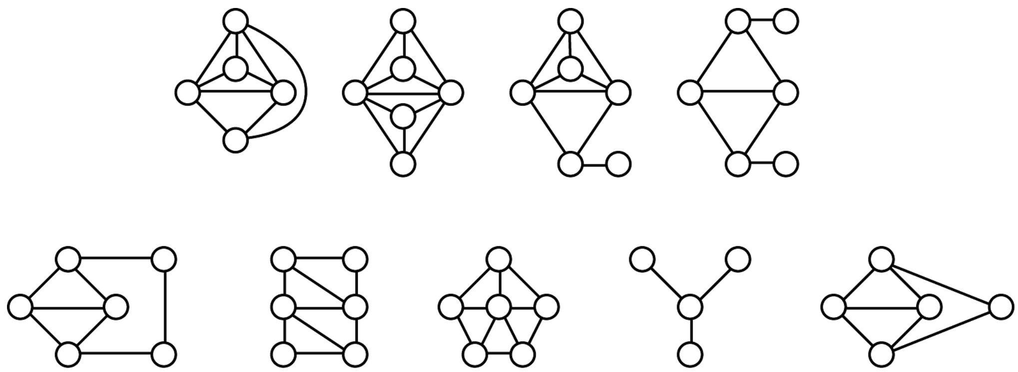
un graphe H qui n'est pas de ligne — le graphe G tel que H=L(G)

Notons que si le graphe H ci-dessus avait une arête supplémentaire, par exemple une arête reliant A à D, alors H serait un graphe de ligne puisque l'arête B pourrait alors avoir une extrémité en commun avec A et D et l'autre extrémité en commun avec C.



un graphe de ligne H — le graphe G tel que H=L(G)

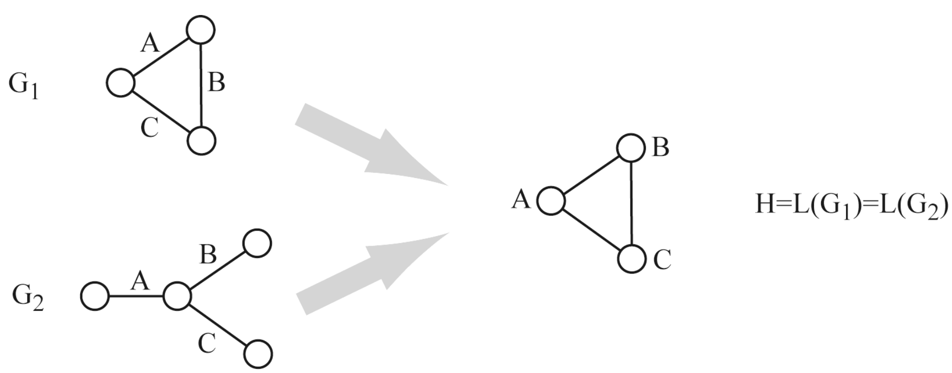
Il existe en fait exactement 9 configurations qui ne correspondent pas à un graphe de ligne. Elles sont représentées ci-dessous. Si un graphe H contient au moins une de ces 9 configurations, telle quelle (c'est-à-dire sans arête supplémentaire), alors il n'est pas un graphe de ligne. L'avant-dernière de ces configurations est celle que nous avons donnée comme exemple ci-dessus.



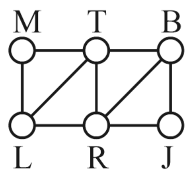
De plus, si un graphe H ne contient aucune ce ces 9 configurations, alors il existe un unique graphe G tel que H=L(G), pour autant qu'aucune composante connexe de G ne soit un triangle. Le graphe de gauche donné tout au début de ce chapitre est donc l'unique graphe G dont le graphe de droite est le graphe de ligne.

un graphe de ligne H — l'unique graphe G tel que H=L(G)

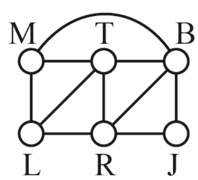
L'exception mentionnée ci-dessus pour les graphes G contenant des composantes connexes qui sont des triangles vient du fait qu'il existe deux graphes G_1 et G_2 tels que $L(G_1)$ et $L(G_2)$ sont des triangles.



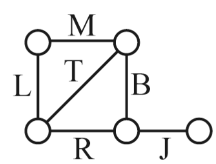
Pour démasquer l'imposteur dans la course à l'héritage, Bonvin construit un graphe représentant le jeu de piste au complet, incluant les informations contenues dans la partie de document retrouvée, soi-disant, par le demandeur de rançon. Pour ce faire, il crée un graphe contenant un sommet par sentier et il relie deux sentiers lorsque ceux-ci on une extrémité en commun. Ce graphe qu'il a construit doit en fait correspondre au graphe de ligne du graphe dans lequel les sommets sont les intersections aux extrémités des sentiers et les arêtes sont les sentiers eux-mêmes. Bonvin montre à Manori le graphe suivant et Manori se rend rapidement compte qu'il s'agit de la sixième configuration interdite.



Dans la partie de document soi-disant retrouvée pas le demandeur de rançon, il semblerait que les sentiers du muguet et du bégonia (c'est-à-dire les sommets M et B) n'aient pas d'extrémité en commun. C'est la seule information qui peut être fausse car il n'y a aucun doute sur la validité du reste du document. Si on suppose au contraire que les sentiers du muguet et du bégonia ont une extrémité en commun, on doit alors rajouter une arête entre M et B et on a cette fois-ci un graphe de ligne, tel que démontré par Manori.



le graphe de ligne H
correspondant au jeu de piste



le graphe G tel que H=L(G)

Les graphes de ligne peuvent être utiles pour offrir une représentation différente d'une situation. Considérons par exemple un problème de ramassage des ordures ménagères. Plus précisément, supposons qu'une entreprise de transport est chargée de ramasser les ordures dans un quartier de Montréal. On lui a remis un plan du quartier avec l'ensemble des rues à desservir. Cette entreprise désire n'utiliser qu'un seul camion pour réaliser ce ramassage. De plus, pour minimiser le nombre de kilomètres parcourus, l'entreprise aimerait savoir s'il existe une tournée qui passe exactement une fois par chaque rue du quartier. Le camion ne parcourrait ainsi aucun kilomètre superflu. En termes de théorie des graphes, l'entreprise aimerait savoir s'il existe un cycle *eulérien* dans le graphe.

Définition

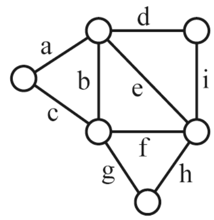
Un cycle qui passe exactement une fois par chaque arête d'un graphe est dit « eulérien ».

En considérant le graphe de ligne L(G) de G, on est donc amené à se demander s'il existe une tournée qui passe une fois exactement par chaque sommet de L(G). Un tel cycle est dit *hamiltonien*.

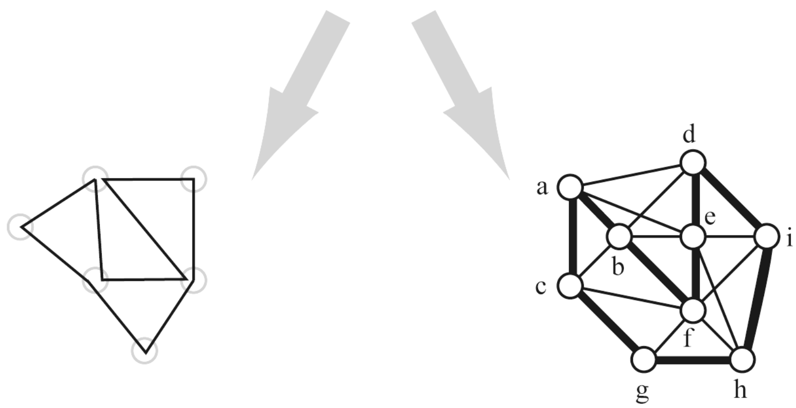
Définition

Un cycle qui passe exactement une fois par chaque sommet d'un graphe est dit « hamiltonien ».

En d’autres termes, pour déterminer s’il existe un cycle eulérien dans un graphe G, on peut construire le graphe de ligne L(G) et déterminer s’il existe un cycle hamiltonien dans L(G). Dans l’exemple ci-dessous, on suppose que l’entreprise doit ramasser les ordures dans 9 rues a,b,…,i. Nous avons représenté en bas à gauche un cycle eulérien dans G alors que le graphe de droite représente cette même tournée, mais sous forme de cycle hamiltonien (en gras) dans L(G).



graphe G
avec 9 rues à desservir



tournée qui passe exactement une fois par chaque arête de G (cycle eulérien)

tournée (en gras) qui passe exactement une fois par chaque sommet de L(G) (cycle hamiltonien)