Les graphes d’intervalles

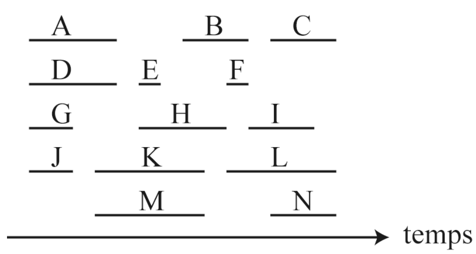
Complément au chapitre 3 « Vol aux archives cantonales »

Considérons un ensemble de tâches ayant chacune une heure de début et une heure de fin bien précises. Supposons qu’on demande à des employés d’effectuer ces tâches, mais qu’aucun employé ne puisse effectuer deux tâches à la fois. Pour modéliser cette situation il suffit de considérer le graphe dans lequel chaque tâche est représentée par un sommet et une arête relie deux sommets lorsque les tâches correspondantes se chevauchent dans le temps. Le graphe ainsi construit est dit *d’intervalles*.

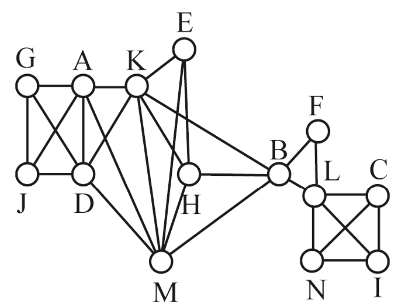
Définition

Un « graphe d’intervalles » est le graphe d’intersection d’intervalles sur une droite. Donc, étant donné un ensemble $E=\{E_1,\ldots,E_n\}$ d’intervalles sur une droite, on lui associe le graphe d’intervalles $G=(V,E)$ où $V=\{1,\ldots,n\}$ et deux sommets x et y sont reliés par une arête si et seulement si $E_x \cap E_y \neq \emptyset$.

Exemple



14 Tâches à effectuer



graphe d’intervalles correspondant

Dans l’affaire du vol aux archives cantonales, Costello résume les témoignages des suspects à l’aide du tableau suivant dans lequel une croix dans une case signifie que la personne de la ligne concernée dit avoir rencontré la personne de la colonne concernée.

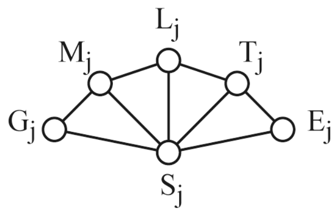
jeudi 9 avril 2009

	T	B	E	S	L	G	M
T			x	x	x		
B							
E	x			x			
S	x		x		x	x	x
L	x			x			x
G				x			x
M				x	x	x	

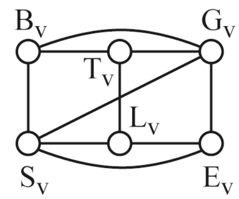
vendredi 10 avril 2009

	T	B	E	S	L	G	M
T		x			x	x	
B	x			x		x	
E				x	x	x	
S		x	x		x	x	
L	x		x	x			
G	x	x	x	x			
M							

Si chaque suspect n’est venu qu’une fois par jour au maximum aux archives cantonales, chacun a passé un intervalle de temps sur les lieux. On peut donc associer un graphe d’intervalles à ces témoignages en créant un sommet par suspect et en reliant deux sommets lorsque les intervalles qui leur sont associés se chevauchent dans le temps, autrement dit lorsque ces deux suspects se sont rencontrés (ce qui veut dire qu’on a une croix dans les tableaux de Costello). Sur cette base, Manori construit les graphes suivants qui correspondent en principe à deux graphes d'intervalles, l'un pour les intervalles du jeudi et l'autre pour ceux du vendredi.



Graphe du jeudi



Graphe du vendredi

Pour déterminer le coupable, Manori démontre, entre autres, que le graphe de droite n'est pas un graphe d'intervalles. On peut donc se demander comment reconnaître un graphe d'intervalles. La propriété suivante est satisfaite par tous les graphes d'intervalles et est due au fait que le temps est linéaire et non circulaire.

Propriété

Si G est un graphe d'intervalles alors il n'existe pas de cycle avec plus de 3 arêtes et sans raccourci.

La notion de « sans raccourci » de la propriété ci-dessus est très importante. Par exemple le graphe de gauche ci-dessus est un graphe d'intervalles bien qu'il existe un cycle de longueur 6 constitué des 6 arêtes sur le pourtour du graphe. Ce cycle comporte en effet des raccourcis. Par exemple, au lieu d'aller de S_j à G_j puis à M_j, on peut emprunter le raccourci que représente l'arête reliant S_j à M_j.

Manori à montré à ses collègues que le graphe du vendredi contient 2 carrés, c'est-à-dire deux cycles avec 4 arêtes sans raccourci. Ce n'est donc pas un graphe d'intervalles, ce qui signifie que l'un des suspects s'est rendu plus d'une fois aux archives le vendredi.

Les graphes d'intervalles ont encore d'autres propriétés intéressantes. La propriété énoncée ci-dessous va nous permettre de facilement déterminer le nombre minimum d'employés nécessaires pour effectuer toutes les tâches du problème décrit au début de ce chapitre.

Définitions

Un sommet est « simplicial » si ses voisins (c'est-à-dire les sommets auxquels il est relié par une arête) sont tous reliés entre eux par une arête.

Un « schéma d'élimination parfait » dans un graphe à n sommets est un ordre $v_1,\ldots,v_n$ des sommets tel que v_i est simplicial dans le graphe qui ne contient que les sommets $v_i,\ldots,v_n$.

En d'autres termes, si $v_1,\ldots,v_n$ est un schéma d'élimination parfait, alors tous les voisins de v_1 sont reliés entre eux. Aussi, si on supprime le sommet v_1 du graphe, alors tous les voisins de v_2 sont reliés entre eux. Et ainsi de suite, c'est-à-dire que si on supprime les sommets $v_1,\ldots,v_{i-1}$ du graphe, alors tous les voisins de v_i sont reliés entre eux.

Propriété

> Un graphe est d'intervalles si, et seulement si, il possède un schéma d'élimination parfait.

Il est très facile de déterminer un schéma d'élimination parfait dans un graphe d'intervalles. Il suffit de choisir un sommet simplicial (c'est-à-dire dont tous les voisins sont reliés entre eux) et de le nommer v_1. On supprime alors ce sommet du graphe et on recherche un sommet simplicial dans le graphe résiduel qu'on nomme v_2. On poursuit ainsi jusqu'à ce que le graphe résiduel soit vide.

Revenons au problème original qui consiste à affecter des tâches à des employés, chaque tâche ayant une heure de début et une heure de fin bien précises. Ce problème revient donc à colorer les sommets du graphe d'intervalles associé avec la contrainte que deux sommets reliés par une arête ne peuvent pas recevoir la même couleur. En d'autres termes, chaque couleur correspond à un employé et on interdit d'affecter le même employé à deux tâches qui se chevauchent dans le temps. Si on cherche à minimiser le nombre d'employés nécessaire pour effectuer toutes ces tâches, cela est équivalent à déterminer une coloration des sommets qui utilise un nombre minimum de couleurs.

Une telle coloration peut être obtenue facilement avec la technique suivante dans laquelle on suppose que les couleurs sont classées dans un certain ordre.

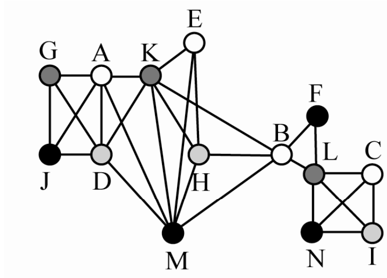
Coloration des sommets d'un graphe d'intervalles avec un nombre minimum de couleurs

1. Déterminer un schéma d'élimination parfait $v_1,\ldots,v_n$
2. Colorer les sommets les uns après les autres, selon l'ordre inverse $v_n,\ldots,v_1$ en choisissant toujours la première couleur disponible.
3.

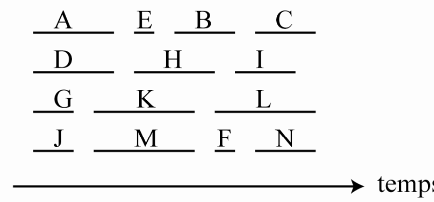
Dans l'exemple des 14 tâches du début de ce chapitre, on voit par exemple que le sommet C est simplicial et on peut donc le choisir pour v_1. Nous aurions aussi pu choisir G ou J ou I, etc. Par contre, nous n'aurions par exemple pas pu choisir le sommet L puisque ses voisins F et B ne sont pas reliés aux autres voisins C, I et N de L. En deuxième position, on peut mettre, par exemple, le sommet I, puis le sommet N en 3^e. Le sommet L devient alors simplicial puisque ses voisins dans le graphe résiduel obtenu en supprimant C, I et N sont F et B qui sont reliés entre eux. On peut donc mettre le sommet L en 4^e position. On procède ainsi de suite pour obtenir, par exemple, l'ordre suivant :

C, I, N, L, F, B, E, H, K, M, A D, G, J

On peut maintenant colorer le graphe. Supposons que les couleurs sont ordonnées du plus foncé au plus clair. On commence donc par donner la couleur noire à J, puis la couleur gris foncé à G, le gris clair à D et le blanc à A. Le sommet M qui est le suivant à être coloré peut recevoir la couleur gris foncé ou le noir. Cette dernière couleur étant prioritaire, on la choisit pour le sommet M. On poursuit ainsi de suite jusqu'à obtenir la coloration de tout le graphe qui est représentée à gauche dans la figure qui suit. Cette coloration nécessite 4 couleurs, ce qui signifie qui faut engager 4 employés pour réaliser les 14 tâches. L'affectation des tâches aux 4 employés est représentée à droite de la figure. Chaque ligne correspond à une couleur et donc à un employé. Par exemple, l'employé représenté par la couleur blanche réalise les tâches A, B, C et E puisque ces sommets sont de couleur blanche.



coloration dans l'ordre inverse du schéma d'élémination parfait C,I,N,L,F,B,E,H,K,M,A,D,G,J



Les tâches peuvent être réalisées par 4 employés
Chaque ligne correspond au travail d'un employé

Dans l'exemple ci-dessus, on est amené à déterminer une partition des sommets d'un graphe d'intervalles en un nombre minimum de sous-ensembles tel qu'il n'existe aucune arête reliant deux sommets d'un même sous-ensemble. Certaines situations peuvent être modélisées à l'aide d'un graphe d'intervalles dans lequel il faut déterminer une partition de ses sommets en un nombre minimum de sous-ensembles tel qu'il ne manque cette fois-ci aucune arête entre deux sommets d'un même sous-ensemble. En termes de coloration, on veut donc cette fois-ci colorer les sommets tel que les sommets de même couleur soient tous reliés entre eux par une arête. Voici trois exemples de telles situations.

Exemple 1

Un entrepôt de produits pharmaceutiques doit conserver en stock des produits $p_1,\dots,p_n$. Pour chaque produit p_i on connaît les températures minimum m_i et maximum M_i de conservation. On désire déterminer le nombre minimum d'armoires frigorifiques qui seront nécessaires pour conserver tous les produits.

Pour résoudre ce problème, construisons un graphe d'intervalles dans lequel les sommets représentent les produits et deux produits p_i et p_j sont reliés par une arête si les intervalles $[m_i, M_i]$ et $[m_j, M_j]$ ont une intersection non vide. On désire donc créer des groupes de produits tel que les produits d'un même groupe soient tous reliés entre eux par une arête (ce qui signifie qu'il existe une température de conservation qui convient à tous les produits d'un même groupe).

Exemple 2

Les personnes $P_1,\dots,P_n$ ont décidé de passer leurs vacances à l'hôtel Bellevue. La personne P_i y sera du jour A_i au jour B_i. Le directeur de l'hôtel fait confiance à son gérant pour le bon déroulement des séjours des vacanciers et ne se trouve donc que très rarement à l'hôtel. En fait, le directeur ne se rend à l'hôtel que de temps en temps, histoire de faire connaissance avec les clients qui y sont présents et de tenter ainsi de les fidéliser. Il veut faire la connaissance de ses n clients tout en minimisant le nombre de jours passés à l'hôtel Bellevue car il est un homme très occupé, et surtout parce que l'hôtel est situé dans un coin très retiré du pays, difficile d'accès.

Pour déterminer le nombre minimum de visites que le directeur doit faire pour connaître tous ses clients, on peut créer un graphe d'intervalles dans lequel les sommets sont les clients et deux clients P_i et P_j sont reliés par une arête si les intervalles $[A_i, B_i]$ et $[A_j, B_j]$ ont une intersection non vide. On désire donc créer des groupes tels que les clients d'un même groupe soient tous reliés entre eux par une arête (ce qui signifie qu'il existe une date à laquelle tous ces clients sont présents à l'hôtel et le directeur peut donc faire leur connaissance).

Exemple 3

Un amateur de théâtre désire assister à n pièces de théâtre $P_1,\ldots,P_n$ qui seront jouées prochainement à Montréal. Chaque pièce P_i sera jouée pendant une période continue, du jour D_i au jour F_i. Lorsque plusieurs pièces de théâtre sont jouées le même jour, elles le sont à des heures différentes pour qu'on puisse assister à chacune d'elles le même jour. L'amateur de théâtre habite à une heure de voiture de Montréal et veut à tout prix dormir à son domicile chaque nuit. Ainsi, s'il assiste à des pièces de théâtre 2 jours consécutifs, il devra se rendre 2 fois à Montréal. Combien de fois au minimum devra-t-il se rendre à Montréal pour pouvoir assister à toutes les pièces ?

Pour résoudre ce problème, on peut créer un graphe d'intervalles dans lequel les sommets sont les pièces de théâtre et deux pièces de théâtre P_i et P_j sont reliées par une arête si les intervalles $[D_i, F_i]$ et $[D_j, F_j]$ ont une intersection non vide. On désire donc créer des groupes tel que les pièces de théâtre d'un même groupe soient toutes reliées entre elles par une arête (ce qui signifie qu'il existe une date à laquelle l'amateur de théâtre pourra toutes les voir).

Pour résoudre ces trois problèmes, il faut donc déterminer une partition des sommets d'un graphe d'intervalles en un nombre minimum de groupes et tel que les sommets d'un même groupe soient tous reliés par une arête. Pour ce faire, on peut s'y prendre comme suit. On commence par ordonner les sommets par valeur croissante de la borne inférieure de leur intervalle. Pour le premier exemple, on ordonne donc les produits par m_i croissant; pour le deuxième exemple, ce sont les A_i qui doivent être croissant alors que pour le troisième exemple ce sont les D_i.
On parcourt ensuite les sommets dans cet ordre. On met le premier sommet dans un premier groupe et la règle pour les autres sommets est la suivante : si le sommet considéré peut être introduit dans le groupe actuellement créé, on le rajoute à ce groupe; sinon, on ferme le groupe et on place le sommet considéré dans un nouveau groupe.

À titre d'illustration, considérons l'exemple 3 avec les n=5 pièces de théâtre suivantes :

i	1	2	3	4	5
D_i	26 juin	20 juin	22 juin	17 juillet	19 juillet
F_i	22 juillet	24 juin	15 juillet	23 juillet	20 juillet

L'ordre des pièces de théâtres est donc 2,3,1,4.5. On met ainsi la pièce 2 dans un premier groupe. La pièce 3 peut faire partie de ce groupe car elle a une date en commun avec la 2. La pièce 1 ne peut plus faire partie de ce groupe car elle débute après la fin de la pièce 2. On crée donc un nouveau groupe pour la pièce 1. Les pièces 4 et 5 sont ensuite introduites dans le même groupe que la pièce 1 car elles ont le 19 et le 20 juillet en commun. L'amateur de théâtre peut donc venir à Montréal le 22, 23 ou 24 juin pour voir les pièces 2 et 3 et le 19 ou le 20 juillet pour assister aux pièces 1, 4 et 5.

Voici le graphe d'intervalles associé à ce problème avec une coloration des sommets en deux couleurs tel que les sommets d'une même couleur (c'est-à-dire d'un même groupe) sont tous reliés entre eux par une arête.