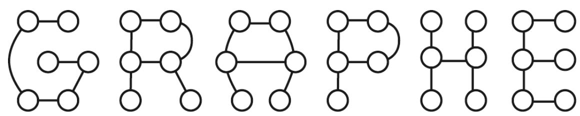
Définitions et concepts de base

Complément au « Prologue » et au chapitre 1 « Le respect des règles »

1. Chaînes, cycles et connexité

Prenez une feuille de papier, choisissez quelques emplacements que vous marquez, par exemple par de petits cercles, et ajoutez quelques liaisons entre certaines paires d'emplacements. Les emplacements que vous avez choisis, ces petits cercles sur votre feuille, sont appelés des « sommets » alors que les traits que vous avez tracés pour relier certains sommets entre eux sont appelés des « arêtes ». Ces traits peuvent être droits ou courbes, ce qui importe étant l'existence ou non d'un lien entre deux sommets. Ainsi, par exemple, le dessin ci-dessous est un graphe qui contient 35 sommets et 32 arêtes.

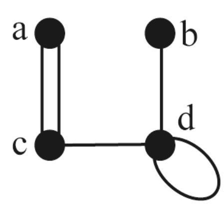


C'est ainsi que Manori décrit un graphe. De manière plus formelle, un graphe est défini à l'aide d'une paire ordonnée (V,E) : V est un ensemble d'éléments qu'on appelle « sommets » alors que E est une ensemble de liens, appelés « arêtes », reliant certaines paires de sommets. E est donc un sous-ensemble du produit cartésien V×V. On note en général {x,y} une arête reliant les sommets x et y.

Une arête est donc une paire non ordonnée de sommets. Une arête reliant les sommets x et y peut ainsi tout aussi bien être notée {x,y} que {y,x}.

Notons qu'une arête peut relier un sommet à lui-même et on parle alors de « boucle ». Aussi, il peut exister plusieurs arêtes en parallèle reliant une même paire de sommets. On dit alors qu'on à affaire à un « multi-graphe ».

Par exemple, le multi-graphe représenté ci-dessous contient quatre sommets représentés à l'aide de cercles noirs et portant les étiquettes a, b, c et d. Il existe une boucle autour du sommet d et deux arêtes parallèles reliant les sommets a et c.



Définition

Une « chaîne » dans un graphe est une succession d'arêtes qui permet de relier deux sommets du graphe.

À titre d'illustration, en mettant bout à bout les arêtes {b,d} et {c,d} dans le graphe ci-dessus, on obtient une chaîne reliant les sommets b et c. Il existe en fait d'autres chaînes reliant les sommets b et c. Par exemple, on peut considérer les séquences suivantes d'arêtes :

- {b,d}, {d,d}, {c,d}, {a,c}, {a,c}
- {b,d}, {d,d}, {d,d}, {d,d}, {d,d}, {c,d}.

Définition

Une chaîne qui ne passe qu'au plus une fois par chaque sommet est dite « élémentaire ».

La seule chaîne élémentaire reliant les sommets b et c dans l'exemple ci-dessus est la chaîne constituée des arêtes {b,d} et {c,d}.

Définition

Une chaîne qui ne passe qu'au plus une fois par chaque arête est dite « simple ».

Il n'existe que quatre chaînes simples reliant b et c dans le graphe ci-dessus. Elles sont constituées des séquences suivantes d'arêtes :

- {b,d}, {c,d}
- {b,d}, {d,d}, {c,d}
- {b,d}, {c,d}, {a,c}, {a,c}
- {b,d}, {d,d}, {c,d}, {a,c}, {a,c}.

Remarques

- Les deux dernières chaînes décrites ci-dessus sont simples car il existe deux arêtes distinctes reliant les sommets a et c. S'il n'existait qu'une arête entre ces deux sommets, ces deux dernières chaînes ne seraient pas simples car elles utiliseraient deux fois l'arête reliant le sommet a au sommet c.
- Toute chaîne élémentaire est simple puisque plusieurs passages sur une même arête impliquent nécessairement plusieurs passages sur les extrémités de cette arête.

Définition

Un graphe est dit « connexe » s'il existe une chaîne entre toutes les paires de sommets du graphe.

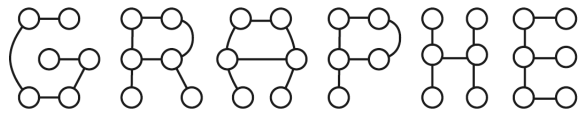
Manori définit le terme de « connexe » à Sébastien en utilisant les termes suivants :

Si tu peux te rendre de n'importe quel sommet du graphe vers n'importe quel autre, en parcourant des arêtes, on dit que le graphe est connexe. Ce mot tire son origine du fait que tu peux connecter n'importe quel point à n'importe quel autre en utilisant les arêtes du graphe.

Définition

On dit que deux sommets font partie d'une même « composante connexe » dans un graphe G si et seulement si il existe une chaîne dans G qui les relie.

Par exemple, il existe six composantes connexes dans le graphe ci-dessous.



On peut donc affirmer qu'un graphe est connexe si et seulement si il ne contient qu'une composante connexe.

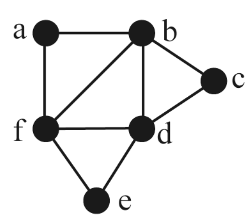
Définition

Une chaîne dont l'extrémité initiale est égale à l'extrémité finale est appelée un « cycle ». À nouveau, on parle de cycle « élémentaire » lorsque les sommets du graphe ne sont visités qu'au plus une fois, et on parle de cycle « simple » si aucune arête n'est utilisée deux fois.

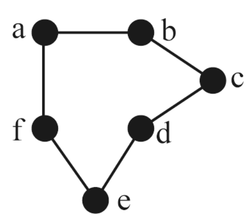
Remarque

Tout cycle élémentaire est nécessairement simple puisqu'emprunter plusieurs fois une même arête implique plusieurs passages sur les extrémités de cette arête.

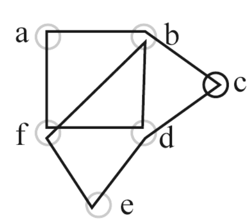
Dans l'exemple ci-dessous, il n'existe qu'un cycle élémentaire passant par chaque sommet du graphe. Il s'agit du cycle constitué des arêtes {a,b}, {b,c}, {c,d}, {d,e}, {e,f} et {f,a}. Ce cycle est également simple.



Le même graphe contient d'autres cycles simples, par exemple celui constitué des arêtes {a,b}, {b,c}, {c,d}, {d,e}, {e,f} et {f,b}, {b,d}, {d,f} et {f,a}, tel qu'illustré ci-dessous.



cycle élémentaire
(et donc simple)



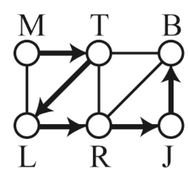
cycle simple
main non élémentaire

2. GRAPHES ORIENTÉS

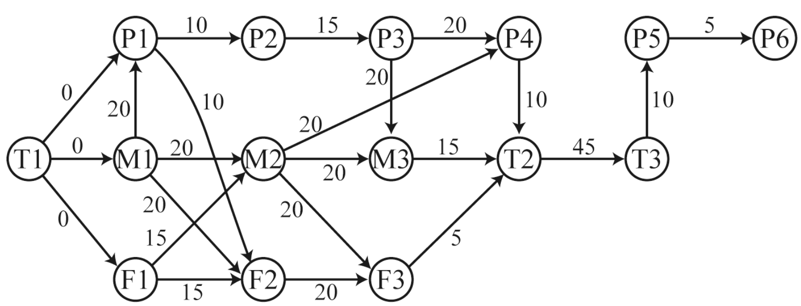
Dans certains cas, il peut être intéressant d'associer une orientation aux arêtes du graphe. Ainsi, au lieu d'avoir une arête {x,y} reliant un sommet x et un sommet y, on peut avoir une arête orientée de x vers y ou de y vers x. On parle alors d'« arc » et on utilise la notation (x,y) pour représenter un arc se dirigeant de x vers y.

On a parfois affaire à des graphes « mixtes », lorsque quelques arêtes (mais pas toutes) ont une orientation.

Au chapitre IV, Bonvin a dessiné un graphe mixte en essayant de reproduire la configuration des lieux du jeu de piste. Les arcs représentent le cheminement qui permet de récolter les indices laissés par Monsieur Grumbacker.



Manori a pour sa part utilisé des graphes orientés au chapitre VIII pour tenter de retarder le réveil de la famille Courtel le jeudi matin.

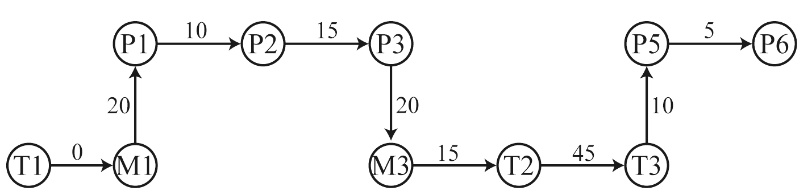


Toutes les notions définies ci-dessus pour les graphes non orientés peuvent être étendues aux graphes orientés. On obtient alors, par exemple, les définitions suivantes.

Définition

Un « chemin » dans un graphe orienté est une succession d'arcs qui permet de se rendre d'un sommet à un autre.

Exemple : au chapitre VIII, Manori a dessiné un chemin reliant T1 à P6.



Définition

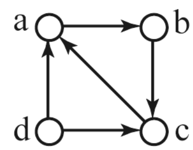
Un graphe orienté est « fortement connexe » s'il existe un chemin de x vers y et de y vers x pour toute paire x,y de sommets du graphe.

Exemple : le graphe orienté dessiné par Manori pour retarder le réveil des Courtel n'est pas fortement connexe car il n'existe, par exemple, aucun chemin menant de F1 à T1. Il suffirait par contre de rajouter un arc de P6 vers T1 pour que le graphe devienne fortement connexe.

Définition

Un « circuit » dans un graphe orienté est un chemin dont l'extrémité initiale coïncide avec l'extrémité finale.

Exemple : le graphe ci-dessous possède un circuit contenant les sommets a, b et c.



Les chemins et les circuits peuvent être élémentaires ou simples, comme dans le cas des chaînes et des cycles. Ils sont élémentaires s'ils ne passent pas deux fois par un même sommet et ils sont simples s'ils ne passent pas deux fois par un même arc.

3. DEGRÉS DES SOMMETS

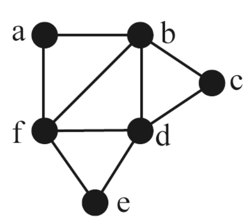
Dans le premier chapitre du livre, Manori explique à Sébastien que

> *lorsqu'on dessine un graphe quelconque, on peux toujours compter le nombre d'arêtes qui touchent chaque sommet.*

Définition

Le nombre d'arêtes qui touchent un sommet est son « degré ».

Ainsi, par exemple, dans le graphe ci-dessous, les sommets a, c et e ont un degré 2 alors que les sommets b, d et f ont un degré 4.



La propriété qui permet à Manori de démontrer que les organisateurs ne pourront pas créer les groupes désirés en satisfaisant toutes les contraintes est la suivante.

Propriété

La somme des degrés des sommets d'un graphe est toujours un nombre pair

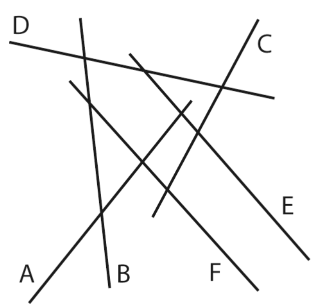
Preuve

Lorsqu'on fait la somme des degrés des sommets, on compte chaque arête deux fois. En effet, chaque arête {x,y} sera comptabilisée une première fois lorsqu'on considère le degré du sommet x, et une deuxième fois lorsqu'on rajoute le degré de y.
Cette somme correspond ainsi au double du nombre d'arêtes dans le graphe et il s'agit donc d'un nombre pair □

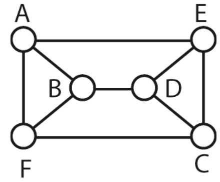
Dans l'exemple ci-dessus, on a 3 sommets de degré 2 et 3 sommets de degré 4, ce qui donne une somme de $3\times2 + 3\times4 = 18$, soit le double de 9 qui est le nombre d'arêtes dans le graphe.
C'est ainsi que Manori a réussi à convaincre Sébastien que le regroupement souhaité par les organisateurs ne peut pas exister. En effet, le graphe qu'il considère comporte un sommet par participant à COPS et une arête entre deux participants lorsque ceux-ci ont déjà travaillé ensemble. Demander à ce que chaque personne soit dans un groupe de 15 comportant 7 personnes avec qui elle a déjà travaillé est équivalent à vouloir construire un graphe à 15 sommets ayant tous un degré 7. Étant donné que la somme des degrés de ce graphe souhaité devrait être $7\times15 = 105$ qui est un nombre impair, le graphe que les organisateurs veulent construire ne peut pas exister.

Autres applications.

- Il est tout aussi impossible de connecter 15 ordinateurs avec des câbles de telle sorte que chaque ordinateur ait un lien direct avec exactement 7 autres ordinateurs. Dans ce cas-ci, les sommets sont les ordinateurs et les arêtes représentent les liens par câble entre les ordinateurs.
- Il est tout aussi impossible de tracer 15 segments de droite sur le plan de telle sorte que chaque segment ait une intersection non vide avec exactement 7 autres segments. Les sommets correspondent ici aux segments et les arêtes aux intersections entre segments. Si l'on veut par contre 6 segments qui touchent chacun exactement 3 autres segments, cela est possible, par exemple à l'aide des 6 segments ci-dessous



qui peuvent être associés au graphe ci-dessous



D’autres propriétés très simples portant sur les degrés des sommets peuvent être démontrées. En voici un autre exemple.

Propriété

Dans tout graphe il existe au moins deux sommets de même degré.

Preuve

Considérons un graphe quelconque et soit x son nombre de sommets. Le degré de chaque sommet est donc un nombre à choisir dans l’ensemble {0,1,…,x-1} puisque chaque sommet ne peut être relié qu’à au plus x-1 autres sommets.

Si tous les degrés sont différents, étant donné que {0,1,…,x-1} contient x valeurs et que le graphe comporte x sommets, il doit nécessairement exister un sommet de degré y pour chaque y dans l’ensemble {0,1,…,x-1}.

Il existe donc un sommet de degré 0 qui n’est relié à aucun autre sommet.

Il existe aussi un sommet de degré x-1 qui est relié à tous les autres sommets. Mais ceci est en fait une contradiction puisque le sommet de degré x-1 ne peut pas être relié au sommet de degré 0 (qui n’est relié à aucun autre sommet). $\square$

Application

Imaginons que les organisateurs de COPS décident de changer les règles pour la création des groupes de travail. Ils pourraient par exemple décider de faire en sorte que lorsque deux personnes sont dans un même groupe, elles connaissent un nombre différent de personne dans ce groupe. Manori aurait alors tout aussi facilement pu prouver qu’un tel regroupement n’est pas possible puisque le graphe associé à chaque groupe devrait comporter des sommets de degrés tous différents les uns des autres, ce qui est impossible par la propriété ci-dessus.