

**Optimisation stochastique de
l'affectation des types d'avions
dans un réseau en étoile**

M. Peyrega
F. Soumis

G-2012-47

Août 2012

Optimisation stochastique de l'affectation des types d'avions dans un réseau en étoile

Mathilde Peyrega

François Soumis

GERAD & Département de mathématiques et de génie industriel

École Polytechnique de Montréal

C.P. 6079, succ. Centre-ville

Montréal (Québec) Canada, H3C 3A7

mathilde.peyrega@gerad.ca

francois.soumis@gerad.ca

Août 2012

Les Cahiers du GERAD

G-2012-47

Copyright © 2012 GERAD

Résumé

Le secteur économique du transport aérien de passagers est soumis à de fortes contraintes dues aux nouveaux acteurs dans le domaine qui tendent les prix vers le bas, ainsi qu'aux difficultés conjoncturelles actuelles. En effet, la crise de 2008 a été désastreuse pour les compagnies aériennes, qui ne savent pas ou ne peuvent pas toujours s'adapter à de fortes fluctuations de la demande. C'est dans ce contexte spécifique que de nouveaux outils peuvent être développés pour l'aide à la décision dans les compagnies aériennes.

Afin de réaliser la gestion des opérations pour une saison (une période d'environ trois mois), les compagnies aériennes estiment une demande prévisionnelle, souvent inférée à partir des demandes des saisons passées. L'affectation des types d'avion aux vols est souvent figée pour une saison. Elle est rarement reconsidérée par la suite. À l'heure actuelle, la modification systématique avant un vol (quelques semaines avant par exemple) n'est pas une pratique habituelle dans les compagnies, même si des échanges améliorant les bénéfices sont possibles.

Ce rapport présente l'état de l'art sur les sujets de réaffectation des types d'avion, et propose un modèle qui permettrait aux compagnies aériennes dont le réseau est concentré sur certains aéroports appelés *hubs* de tirer partie de la structure de leur réseau. Ce modèle permettrait à la fois de mieux répondre à une demande moyenne connue, et aussi de mieux s'adapter à d'éventuelles variations dans la structure même de la demande. Une introduction à la programmation stochastique est faite et une méthode de résolution est proposée pour évaluer la méthode. Enfin, des pistes de recherche sont présentées.

Abstract

The consumer airline industry is currently subject to important economic pressures due to the entry of new players and the resulting increased competitiveness of the business environment. The sector has also suffered from important cyclical difficulties. The crisis of 2008 has namely had disastrous consequences on the airline carriers who do not know or cannot adapt to strong fluctuations in demand. It is in this context that decision making tools become important for these companies.

In order to plan operations for periods of approximately three months ahead of time, airline companies use a forecasted demand which is often inferred from the demand of previous seasons. The assignment of fleets to flights is usually fixed for a given season and is rarely reconsidered afterwards. It is currently not a common practice to systematically modify these assignments prior to a flight (e.g. a few weeks before). However, such modifications could yield important benefits for the carriers.

This report presents the state of the art concerning the topic of fleet and flight reassignment. It also proposes a model which allows airline companies with a network concentrated on airports called *hubs* to take advantage of the structure of their network. This model enables carriers to simultaneously adapt to a known average demand and prepare themselves to possible variations in the structure of this demand. In order to evaluate this method, we introduce stochastic programming and propose a resolution method based on this framework. Finally, we present lines of research for future work.

1 Introduction

1.1 Présentation du contexte de la gestion des avions dans les compagnies aériennes

Depuis des dizaines d'années, la recherche opérationnelle fournit aux compagnies aériennes différents outils et logiciels permettant d'optimiser la gestion de leurs opérations. Comme celles-ci sont très complexes, le processus complet est classiquement divisé en cinq étapes résolues successivement [9]. Nous donnons ci-dessous une description succincte de ces différentes phases résumées dans [7].

1.1.1 Les cinq étapes du processus de planification en transport aérien

La figure 1 présente le processus de planification en cinq étapes de la gestion des opérations dans les compagnies aériennes.

Élaboration de l'horaire de vols La première étape de la planification (*Flight scheduling*) consiste à déterminer les marchés à exploiter (les lignes que l'on opère) et l'horaire des vols. Grâce à des études de marchés ainsi qu'aux informations disponibles qui permettent de modéliser la concurrence, la compagnie aérienne choisit les paires de villes à connecter par des vols directs, la fréquence, les heures de la journée et les journées de la semaine auxquelles les vols sont opérés. Cette étape doit tenir compte de la flotte d'avions disponibles afin que les problèmes suivants d'affectation des types d'avion aux vols et de construction d'itinéraires des avions soient réalisables. En pratique, cette étape est souvent élaborée pour une saison d'environ trois mois à partir de l'horaire d'une saison précédente. Actuellement, la plupart des horaires de vols sont cycliques sur une période d'une semaine.

Affectation des types d'avion aux vols Une fois l'horaire de vols établi, il faut résoudre le problème d'affectation des types d'avion aux vols (*Fleet assignment problem*). Cela consiste à répartir la flotte d'avions disponibles sur chacun des vols établis afin d'optimiser le revenu total. Chaque type d'avion a une capacité en passagers et un coût d'opération différent. Au cours de cette étape, la compagnie cherche donc à déterminer

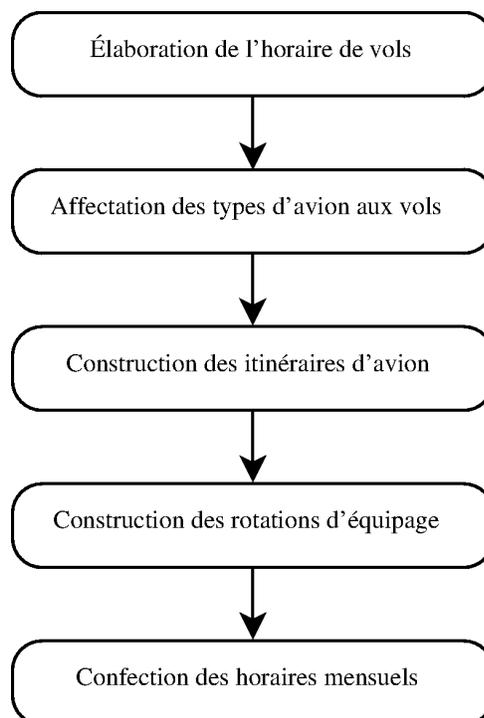


FIGURE 1 – Processus de planification dans une compagnie aérienne

pour chaque vol quel type d'avion est le plus approprié en cherchant à maximiser la différence des profits anticipés et des coûts. Pour ce faire, une approximation des revenus est calculée à l'aide d'un modèle de flot de passagers. Dans un modèle plus simple, un revenu moyen par passager peut être utilisé. La faiblesse majeure de ces deux méthodes est que l'estimation est généralement faite par segment de vol (*leg-based*). La corrélation entre les segments de vol faisant partis d'itinéraires communs n'est donc pas prise en considération. L'affectation doit respecter des contraintes de conservation de flot à chaque aéroport pour chaque type d'avion en tout temps. Elle doit aussi satisfaire la contrainte de disponibilité des avions de chaque type. L'affectation est elle aussi cyclique sur une période d'une semaine, comme l'horaire de vols.

Construction des itinéraires d'avion Au cours de la troisième étape, un itinéraire pour chaque avion spécifique est établi en respectant l'affectation de la phase précédente (*Aircraft routing*). Les itinéraires doivent également respecter différentes contraintes quant à la maintenance périodique des avions. En général, il s'agit d'un problème de faisabilité. Cependant, l'objectif qui consiste à déterminer les connexions les plus profitables ou les plus robustes peut être visé. La pertinence des connexions directes que permet un itinéraire d'avion peut aussi être considérée.

Construction des rotations d'équipage Les deux dernières étapes traitent de l'horaire du personnel. Dans un premier temps, des rotations d'équipage (*Crew pairing*) doivent être construites de façon à s'assurer qu'un équipage est disponible pour couvrir chaque vol. L'objectif est de minimiser les coûts d'opérations des équipages. Une rotation est une suite d'activités (segments de vol, attentes, repos, ...) réalisée par un équipage qui débute et se termine au même aéroport. Ces rotations sont soumises aux différentes règles des conventions collectives et aux normes de sécurité en transport aérien. Ce problème ressemble beaucoup à la construction des itinéraires pour les avions, à la différence près qu'il existe des règles assez restrictives (sécurité et convention collective) réglementant le travail des membres d'équipages.

Confection des horaires mensuels pour les membres d'équipage Dans un second temps la planification consiste à établir les horaires de travail pour le personnel de bord (*Crew rostering*). Cette étape est généralement réalisée pour une durée d'un mois. Un horaire est une suite de rotations, congés, vacances, formations, examens médicaux et autres activités. Le problème est, avant tout, de trouver une solution réalisable couvrant l'ensemble des rotations et respectant les conventions collectives des employés. La compagnie aérienne cherche également, lors de cette étape, à maximiser la préférence des employés ou à équilibrer la charge de travail entre ces derniers. Les horaires mensuels obtenus doivent répondre aux règles imposées par les conventions collectives et chercher la satisfaction du personnel vis à vis de leurs conditions de travail.

1.1.2 Interaction entre les différentes étapes

En pratique, ces étapes ne sont pas indépendantes et leur résolution séquentielle aboutit à une solution sous-optimale. Certaines recherches proposent de résoudre simultanément plus d'une phase du processus de planification. Par exemple, Barnhart présentent dans [1] un modèle fusionnant le problème d'affectation des flottes d'avion avec celui de la construction des itinéraires. D'autres proposent de considérer des fenêtres de temps pour varier les heures de départ et d'arrivée des vols (voir par exemple [6] et [14]).

1.2 Présentation de la problématique

1.2.1 Potentiel de l'optimisation de la planification

Dans les dernières décennies, la recherche opérationnelle a permis aux compagnies aériennes de résoudre considérablement leur coûts opérationnels, et d'augmenter de manière significative le taux de remplissage des avions. Chaque pourcentage d'amélioration obtenus sur les coûts salariaux, où sur les revenus peuvent représenter des économies annuelles de plusieurs dizaines de millions de dollars. Les auteurs de [18] parlent même de 100 millions de dollars d'économie après une étude réalisée chez Delta Airlines.

1.2.2 Retour sur la deuxième étape de la planification

Dans notre travail, nous nous sommes concentrés sur la deuxième étape de la planification : l'affectation des types d'avions aux vols. Cette étape a fait l'objet de nombreuses recherches académiques et industrielles depuis plusieurs décennies. Au niveau académique, le problème est résolu simplement sous certaines hypothèses (en particuliers sur le nombre de flottes) mais est suffisamment compliqué pour qu'il fasse encore l'objet de recherches aujourd'hui. Les différents axes de recherche portent par exemple sur la modélisation des revenus, l'amélioration de la robustesse, ou une meilleure modélisation du comportement des passagers.

Dans les grandes compagnies, l'affectation des types d'avion aux vols est généralement réalisée sur une saison de 3 mois, environ 10 mois à l'avance. La connaissance de la demande en passagers n'est alors estimée que grâce aux techniques citées plus haut qui calculent le flot attendu de passagers (voir 1.1.1). Au moment de la planification des opérations, la distribution des passagers n'est pas connue *parfaitement*, et ce point implique deux inconvénients majeurs :

Le premier défaut est que l'affectation des types d'avion aux vols va être réalisée avec des valeurs moyennes de demande. Les écarts types ne seront pas considérés. L'affectation choisie sera celle qui optimise les revenus dans un contexte déterministe, alors que la demande est stochastique. Ainsi, au lieu d'affecter chaque semaine au vol du lundi 8h un avion de 120 places sur un Paris–Nice, et un avion de 150 places sur un Paris–Toulouse, il pourrait être plus fructueux d'affecter un avion de 120 et un avion de 150 places sur ces deux vols, et de pouvoir changer l'affectation quelques semaines ou quelques jours avant la date d'opération, nous adaptant ainsi mieux à la demande réelle, afin de limiter le débordement (*spill*) et d'augmenter le taux de remplissage des deux avions. Nous reviendrons sur cet exemple dans le chapitre 4.

Le second point est que l'affectation, programmée longtemps à l'avance, ne permet pas de s'adapter aux modifications importantes du comportement des passagers, comme c'est le cas lors d'événements ponctuels.

C'est pour pallier ces deux inconvénients que nous cherchons à définir une nouvelle méthode pour gérer les opérations. Une affectation initiale pourrait être déterminée, a priori, afin de réaliser le processus complet de planification. Par la suite, une réaffectation des types d'avion pourrait avoir lieu afin de tenir compte de nouvelles informations disponibles concernant la demande. La réaffectation pourrait par exemple être un échange d'avion qui ne perturbe pas les autres étapes de la planification. Il s'agit donc de mettre en application les techniques de programmation stochastique avec recours (*two-stage stochastic programming*).

L'idée de notre travail est donc d'évaluer la faisabilité d'un tel procédé, et d'estimer les gains atteignables grâce à de telles stratégies. L'adaptation de la planification (l'offre) à la demande a fait l'objet d'une dizaine de travaux de recherche depuis le début des années 1990. Avant de proposer notre modèle, nous allons présenter la revue de la littérature sur les problématiques de réaffectation. Ensuite, nous allons introduire les modèles classiques de programmation stochastique et expliquer une méthode heuristique de résolution. Enfin, nous présenterons un modèle stochastique à deux étapes pour le problème avec recours de l'affectation des types d'avion. Pour finir, nous analyserons les défauts et possibilités de notre modèle, et présenterons les axes de recherche envisagés sur le sujet.

2 Revue de littérature

2.1 Problèmes de réaffectation

2.1.1 Définition du problème dans la littérature

Nous nous concentrerons dans cette revue de littérature sur les différents travaux d'optimisation qui traitent des réaffectations des types d'avion en cours d'opération dans la deuxième étape de la planification (*Fleet assignment problem*), et ce afin de mieux répondre à la demande stochastique en passagers. Il est à noter, avant de commencer, que le problème n'est pas un problème classique, et qu'il n'est pas posé d'une manière unique dans la littérature. La nature des réaffectations réalisées dans les différents travaux peuvent différer, ainsi que les hypothèses faites pour résoudre les modèles.

Nous ne nous intéresserons pas aux réaffectations pour les problèmes de maintenance ni aux réaffectations dans un environnement perturbé (tempête, grèves ...), mais seulement au problème de réaffectation, qui consiste à modifier le résultat de la deuxième étape de la gestion des opérations (cf 1.1.1).

Toute modification qui impacte l'affectation des équipages est très compliquée et coûteuse. C'est pourquoi une grande partie des recherches ont été menées en prenant comme acquis que la seule réaffectation autorisée est celle des types d'avion aux vols. Ainsi, grâce à l'apparition de famille d'avion, on peut changer le type d'avion sur un vol tout en pouvant conserver l'équipage qui effectue le vol. Par exemple, échanger un A318 contre un A319 ne change pas l'équipage pour effectuer le vol, car les qualifications requises par le personnel de bord sont identiques. Seul le nombre de stewarts peut évoluer si le nombre de passagers augmente. C'est dans ce cadre que se situe la plupart des travaux de recherche.

2.1.2 Preuves de concept

Concept de *Demand Driven Dispatch* (D^3) : [3]

Les premiers chercheurs qui ont étudié les bénéfices de la révision systématique de l'affectation des types d'avion sont Berge et Hopperstad [3]. Leurs recherches ont été menées dans le laboratoire de recherche opérationnelle de Boeing à Seattle. A cette époque, il existe déjà cinq types d'appareil dans la série des 737. Leurs travaux de recherche visent à mettre en évidence la flexibilité que cette série offre à une compagnie qui s'équiperait de modèles différents de 737. Ils introduisent le concept de *Demand Driven Dispatch* (*affectation poussée par la demande*), abrégé sous le sigle D^3 : leur modèle consiste à changer dynamiquement le type d'avion affecté à un vol lorsque la date de départ du vol approche et que les prévisions de la demande en passager s'affinent. Ils envisagent les possibilités de réviser l'affectation des types d'avion à l'intérieur d'une même famille d'appareils *compatibles* (puisque les 737 peuvent être affrétés par les même membres d'équipage). Leur étude met en évidence, pour l'époque, un gain potentiel sur les opérations de 1 à 5% grâce à la diminution du débordement en passagers (passagers refusés sur un vol plein), et à l'augmentation du taux d'occupation des sièges sur un avion moins rempli. Pour faire leur preuve de concept, ils résolvent un problème de réaffectation des types d'avion aux vols pour chaque jour, en conservant pour chaque vol un avion compatible de la même famille.

Concept de *Demand Driven Swapping* (DDS) : [5]

Avec une autre perspective, Bish et al. étudient dans [5] les bénéfices que l'on pourrait tirer de plusieurs réaffectations qui consistent en des échanges dictés par la demande (*Demand Driven Swapping*, DDS). Ils s'intéressent au problème d'échanges simples de type d'avion sur des allers-retours, en préservant l'affectation des équipages sur les vols. Ils étudient les délais dans lesquels il faut faire l'échange de type d'avion, et le nombre d'échanges qu'il faut faire pour s'adapter au mieux à la demande et optimiser les gains. Il faut effectivement trouver un compromis entre un échange assez longtemps avant les opérations, afin de ne pas inférer sur le *revenue management* mais sans pour autant avoir une information complète sur la demande, et un échange plus proche de la date du vol, mais qui risque d'avoir un coût de mise en place plus grand, ou bien encore d'être inefficace car il y a déjà eu du débordement sur le vol. A partir de l'étude d'une boucle origine-destination-origine réalisée plusieurs fois dans la journée, les auteurs envisagent deux stratégies différentes : la stratégie limitée, qui permet de faire un échange dans l'affectation, 6 à 4 semaines avant le vol, et une stratégie d'échanges multiples, qui permet de faire plusieurs échanges entre 6 et 4 semaines avant le vol. Leur étude montre que dans les cas où les écarts dans la demande entre différents jours de la semaine sont importants (variance élevée), la stratégie d'échanges multiples ou la réaffectation limitée 4 semaines à l'avance est gagnante, et les gains sont importants. Dans le cas où les écarts dans la demande sont faibles (variance faible), des gains sont aussi possibles, et la stratégie conseillée est celle avec des échanges multiples. Dans la conclusion, les auteurs mettent en avant les difficultés de mise en place de telles solutions. En effet, elles nécessitent une complète coopération entre les services en charge du *revenue management*, de la réoptimisation d'horaire de vols, du service à bord, des opérations de maintenance, et des services dans les aéroports.

Bilan des Preuves de Concept

Dans les deux articles suivants, la conception du réseau n'est pas faite de manière à optimiser la réaffectation. Les auteurs du second article [5], Bish et al., calculent simplement une borne supérieure sur les gains que la stratégie permet d'atteindre pour une affectation donnée. Ils n'étudient pas quel pourrait être le gain si en plus on considère que l'on choisit l'affectation initiale en tenant compte de cette possibilité de recours. Ils font par contre remarquer en conclusion que ce point serait une piste intéressante de recherche future.

2.1.3 Applications et méthodes de résolutions

Optimisation stochastique en deux étapes : [13] et [16]

Pilla et al. [13] proposent de résoudre un problème d'optimisation stochastique à deux étapes qui met en application le concept de *Demand Driven Dispatch*. Sa contribution est d'approximer la fonction revenue en utilisant une méthode statistique de design d'expérience couplée à la méthode MARS (*Multivariate Adaptive Regression Splines*). Un point faible de son étude est que pour générer les scénarios possibles de demande, ils considèrent que les demandes sur des vols distincts sont indépendantes.

Sherali et Zhu [16] développent une autre technique de résolution du problème stochastique en deux étapes. Grâce à l'utilisation de l'algorithme de décomposition de Benders améliorée proposé dans [15], leur méthode permet de résoudre des problèmes stochastiques à variables mixtes (SMIPs) dans lesquels les variables primaires (*first stage*) sont binaires, et les variables secondaires (*second stage*) sont mixtes. Ils améliorent la méthode dans le cas du problème présenté à l'aide d'une analyse polyédrale. Les scénarios utilisés sont ceux décrits dans l'article [11]. Pour une expérience de 50 scénarios, le temps de calcul est de 8h. Il est à noter également que les scénarios utilisés sont encore générés à partir de demandes supposées indépendantes entre les vols. Mais une remarque est faite sur le lien possible entre la demande sur différents vols appartenant à des itinéraires communs.

Réaffectation des types d'avion et réoptimisation de l'horaire de vol : [8]

Jiang et Barnhart [8] proposent un modèle qui consiste en une réaffectation plus complexe. Les avions sont échangés au sein de *familles compatibles*, mais les horaires des vols sont aussi modifiés. Les correspondances pour lesquels aucun billet n'a été vendu ne sont pas nécessairement conservés.

2.2 Bilan de la revue de littérature

Les différents travaux ne permettent pas de résoudre un problème d'optimisation stochastique en deux étapes avec un grand nombre de scénarios, contrairement à la méthode développée dans [12] dans son optimisation stochastique en deux étapes d'un problème de gestion de personnel, sur laquelle nous reviendrons plus tard (cf chapitre 3).

De plus, la génération des scénarios peut être remise en question : les demandes ne sont pas indépendantes. On peut légitimement penser que deux vols qui partent un même jour à une même heure ont des demandes corrélées (par exemple, le lundi matin la demande est plus forte). Il en est de même pour les vols qui sont communs à plusieurs itinéraires de passagers.

Enfin, nous pouvons aussi remettre en question les conditions de réaffectation : ne serait-il pas envisageable de changer le plan de vol des équipages, si les rotations restent réalisables, et si, en plus, les équipages restent dans l'avion auquel ils sont assignés dans la première affectation ? C'est ce que nous allons analyser dans le modèle présenté au chapitre 4. Mais avant, nous allons faire un résumé sur les problèmes stochastiques en deux étapes et les méthodes de résolutions en nombres entiers de ces problèmes.

3 Programme linéaire stochastique

Nous ne ferons pas ici de revue de littérature complète sur la programmation stochastique en deux étapes. Nous nous contenterons de faire un rapide tour d'horizon des méthodes que nous souhaitons utiliser pour formuler et résoudre notre modèle dans le chapitre 4. Nous reprenons ici l'approche de Pacqueau [12].

3.1 Généralités

Nous considérons des programmes stochastiques en deux étapes (*two-stage stochastic programs*). Ces problèmes font partie de la catégorie des problèmes stochastiques avec recours. L'idée fondamentale est que l'on cherche à prendre une décision qui a un impact sur les opérations dans le futur alors que l'on ne dispose que d'une information imparfaite sur celui-ci. Dans la suite de ce rapport, cette incertitude est représentée par un ensemble d'événements aléatoires Ω . L'aléa sur le futur est représenté par une variable aléatoire $\xi(\omega) \in \Xi$.

La figure 2 décrit les différents temps de décision.

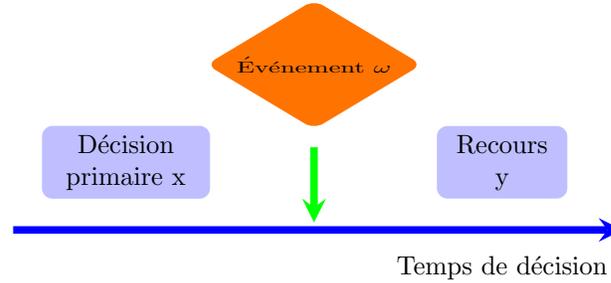


FIGURE 2 – Les différents instants de décision

La variable x représente la décision *primaire* du problème (c'est pourquoi elle est appelée *variable primaire*). Elle est prise indépendamment de l'événement $\omega \in \Omega$. Il s'agit, la plupart du temps, d'une décision à long terme, comme l'affectation approximative de personnels ou la localisation d'entrepôts, avant qu'une réalisation $\omega \in \Omega$ n'ait eu lieu. La variable $y(\omega)$ (*variable secondaire*) représente les *recours* possibles une fois que l'on a davantage d'information sur l'événement ω , ou une fois que celui-ci s'est produit. Ainsi, pour chaque événement ω , $y(\omega)$ représente la meilleure réponse au problème pour une variable primaire x fixée dans une situation déterminée par ω . Les variables x et y sont liées par une contrainte appelée communément contrainte de *non-anticipativité*.

Afin d'optimiser la décision primaire, la difficulté consiste alors à choisir les variables primaires x qui optimisent l'espérance du coût total du problème. De manière simplifiée, cela signifie qu'il faut choisir la meilleure décision initiale (variable primaire x) afin que, grâce aux recours (variables secondaires y), on puisse obtenir, *en moyenne*, la meilleure situation possible.

De tels problèmes se modélisent sous la forme générale suivante :

$$\min_x z = c^T x + \mathbb{E}_\xi (\min \{q(\omega)^T y(\omega)\}) \quad (1)$$

$$Ax = b \quad (2)$$

$$T(\omega)x + Wy(\omega) = h(\omega) \quad (3)$$

$$x \geq 0 \quad , \quad y \geq 0 \quad \forall \omega \in \Omega \quad (4)$$

Le tableau 1 récapitule, pour toute la suite de ce rapport, les dimensions génériques du problème.

TABLE 1 – Taille du problème

Notation	Signification
n_1	Nombre de variables primaires
n_2	Nombre de variables secondaires <i>par scénario</i>
m_1	Nombre de contraintes primaires
m_2	Nombre de contraintes secondaires <i>par scénario</i>
K	nombre de scénarios

Il est possible de réécrire le modèle précédent (1) sous une forme condensée, appelée *forme déterministe équivalente* :

$$\min z = c^T x + Q(x) \quad (5)$$

$$Ax = b \quad (6)$$

$$x \geq 0 \quad (7)$$

La fonction $x \mapsto Q(x)$ est appelée *fonction de recours*. Elle représente l'espérance des meilleurs recours possibles pour x donné :

$$Q(x) = \mathbb{E}_\xi(Q(x, \xi(\omega))) \quad (8)$$

$$Q(x, \xi(\omega)) = \min_y \{q(\omega)^T y \mid Wy = h(\omega) - T(\omega)x, y \geq 0\} \quad (9)$$

Remarque 1 Ce type de problème est appelé *problème à recours fixé*, car dans (3), W ne dépend pas de l'aléa.

3.2 Méthode de résolution : L-shaped

Nous avons vu comment formuler les problèmes stochastiques en deux étapes, et comment écrire une définition déterministe équivalente simplement dans le cas où l'on peut approximer l'ensemble des événements aléatoires réalisables par un ensemble fini d'événements. Cependant, ces problèmes peuvent comporter beaucoup de variables et de contraintes, puisque l'on multiplie la taille de la variable y et le nombre de contraintes par le nombre de scénarios, et que la plupart du temps nous souhaitons pouvoir utiliser un grand nombre de scénarios, afin de mieux modéliser la réalité.

C'est pourquoi nous allons maintenant donner une méthode classique de résolution des problèmes stochastiques avec recours, qui est essentiellement une reformulation de la décomposition de Benders [2]. Une présentation détaillée en est donnée dans le livre de Birge et Louveaux [4].

3.2.1 Principe

Basée sur la décomposition de Benders, la méthode L-shaped est une méthode permettant de résoudre des problèmes stochastiques à deux niveaux, dans le cas où ξ est une variable aléatoire discrète avec $|\Xi| < \infty$ et lorsqu'il n'y a pas de contrainte d'intégrité. Elle a été introduite par Van Slyke et Wets (1969). Même si elle n'est pas applicable en l'état pour notre problème (qui est en nombres entiers), son importance théorique fait que nous la présentons ici. De plus, dans l'heuristique proposée par Pacqueau [12] (cf 3.3), cet algorithme est utilisé.

Puisque nous supposons que $|\Xi|$ est fini, nous allons indiquer par $k \in \{1 \dots K\}$ chacune de ses réalisations, de probabilité respective p^k . Nous notons (q^k, T^k, h^k) les paramètres correspondant à la réalisation k , et y^k le recours associé. Le problème (1) se reformule comme ceci :

$$(PI) \min_{x,y} z = c^T x + \sum_{k=1}^K p^k ((q^k)^T y^k) \quad (10)$$

$$Ax = b \quad (11)$$

$$T^k x + W y^k = h^k, \forall k \in \{1, \dots, K\} \quad (12)$$

$$x \geq 0, \quad y^k \geq 0 \quad (13)$$

La variable de décision est donc le vecteur (x, y_1, \dots, y_K) , comprenant la décision initiale x et les différents recours possibles en fonction de l'aléa. La forme (10) est celle d'un problème linéaire standard. Néanmoins, le grand nombre de variables et de contraintes rend, dans la plupart des cas, la résolution du problème par une méthode générique de type simplexe très longue, voire impossible.

La matrice des contraintes de ce problème a tout de même une forme particulière qu'il est possible d'exploiter :

$$\begin{pmatrix} A & & & & 0 \\ T_1 & W & & & \\ T_2 & & 0 & W & \\ \vdots & & & & \\ T_K & & & \dots & W \end{pmatrix} \quad (14)$$

Cette structure creuse permet de décomposer le problème (PI) en différents sous-problèmes. Pour un x donné, on définit la famille de sous-problèmes suivante :

$$(SP^k)_{k \in \{1, \dots, K\}} \quad \min_{y^k} \quad (q^k)^T y^k \quad (15)$$

$$W y^k = h^k - T^k x \quad (16)$$

$$y^k \geq 0 \quad (17)$$

Introduisons le Lagrangien du sous-problème, avec λ^k multiplicateur le Lagrange associé à la contrainte d'égalité et $\mu^k \geq 0$, multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de positivité :

$$\mathcal{L}(y^k, \lambda^k, \mu^k) = (q^k)^T y^k + (h^k - W y^k - T^k x)^T \lambda^k - (y^k)^T \mu^k \quad (18)$$

$$= (y^k)^T (q^k - W^T \lambda^k - \mu^k) + (h^k - T^k x)^T \lambda^k \quad (19)$$

Le sous-problème dual (dualisation partielle) s'écrit donc, pour tout $k \in \{1 \dots K\}$:

$$(SD^k) \quad \max_{\lambda^k} \quad (h^k - T^k x)^T \lambda^k \quad (20)$$

$$W^T \lambda^k \leq q^k \quad (21)$$

Notons $\Lambda^k = \{\lambda^k | W^T \lambda^k \leq q^k\}$, l'ensemble de réalisabilité du dual.

L'espace Λ^k étant une intersection finie d'hyperplans, c'est un polyèdre. On peut donc appliquer le théorème de Minkowsky-Weil et le décomposer comme somme d'un polytope P et d'un cône C. En notant π^{kl} , $l \in \{1 \dots n_1\}$ les points extrêmes de P et σ^{kl} , $l \in \{1 \dots n_2\}$ les directions extrêmes de C, on a ainsi :

$$\Lambda^k = \left\{ \sum_{l=1}^{n_1} \alpha^l \pi^{kl} + \sum_{l=1}^{n_2} \beta^l \sigma^{kl}, \sum \alpha^l = 1, (\alpha, \beta) \geq 0 \right\} \quad (22)$$

Il est donc possible de reformuler (SD^k), pour tout $k \in \{1 \dots K\}$:

$$\max_{\lambda^k} z_d = (h^k - T^k x)^T \left(\sum_{l=1}^{n_1} \alpha^l \pi^{kl} + \sum_{l=1}^{n_2} \beta^l \sigma^{kl} \right) \quad (23)$$

$$\sum_{l=1}^{n_1} \alpha^l = 1 \quad (24)$$

$$\alpha, \beta \geq 0 \quad (25)$$

Ce problème est simple à résoudre :

$$\begin{cases} \text{Si } (h^k - T^k x)^T \pi^{kl} = \max_{l'} (h^k - T^k x)^T \pi^{kl'} : \alpha^l = 1 \\ \text{Sinon, } \alpha^l = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Si il existe } \sigma^{kl} \text{ tel que } (h^k - T^k x)^T \sigma^{kl} > 0, \text{ le dual est non borné et} \\ \text{donc le primal n'est pas réalisable} \end{cases}$$

Notons θ^k la valeur du problème SD^k . Grâce au résultat précédent, nous pouvons introduire des familles de coupes au problème (PI) :

$$\begin{aligned} \text{Réalissabilité : } & (h^k - T^k x)^T \sigma^{kl} \leq 0, \forall l \in \{1 \dots n_2\} \\ \text{Optimalité : } & \theta^k \geq (h^k - T^k x)^T \pi^{kl}, \forall l \in \{1 \dots n_1\} \end{aligned}$$

Remarque 2 La dualité forte nous permet alors d'affirmer que si une solution du dual vérifie toutes les coupes d'optimalité et de réalisabilité, alors :

1. Le problème primal est réalisable
2. La valeur optimale du primal est égale à celle du dual, c'est à dire $\max_{l'} (h^k - T^k x)^T \pi^{kl'}$

Remarque 3 Les points et directions extrêmes σ^{kl} et π^{kl} sont des constantes du problème, au sens où elles sont indépendantes de x .

On peut donc remplacer $(q^k)^T y^k$ par une variable θ^k , et ajouter à la fois les coupes d'optimalité et de réalisabilité. Si toutes ces coupes sont vérifiées, pour tout x , la valeur optimale de θ^k associée sera effectivement $Q(x)$. Notre problème (PI) s'écrit donc finalement :

$$(PLS) \min_{x, \theta} z = c^T x + \sum_{k=1}^K p^k \theta^k \quad (26)$$

$$Ax = b \quad (27)$$

$$(\sigma^{kl})^T T^k x \geq (\sigma^{kl})^T h^k, \forall (k, l) \quad (28)$$

$$\theta^k + (\pi^{kl})^T T^k x \geq (\pi^{kl})^T h^k, \forall (k, l) \quad (29)$$

$$x \geq 0, \quad \theta \text{ libre} \quad (30)$$

Le nombre de valeurs de k et l étant très élevé, il est trop coûteux d'énumérer toutes les coupes inégalités d'optimalité et de réalisabilité. De plus, toutes n'ont pas forcément la même importance. La méthode *L-shaped* va les générer au fur et à mesure.

Remarque 4 En fait, la méthode *L-shaped* consiste à minorer le plus finement possible $Q(x)$ par des hyperplans.

3.2.2 Algorithme

La méthode *L-shaped* est présentée dans l'algorithme 1.

Algorithme 1 Méthode *L-shaped*

$\nu \leftarrow 0$

Résoudre le problème maître, c'est-à-dire le problème $\min_{\{x | Ax=b, x \geq 0\}} c^T x$

tantque $x^{\nu+1} \neq x^\nu$ **faire**

$\nu++$

si $\exists k^* / SP^{k^*}(x^\nu)$ est non réalisable **alors**

Trouver les $\sigma_{k^*}^l$

Ajouter les coupes de réalisabilité associées

Résoudre le problème maître augmenté (solution : \bar{x})

$x^{\nu+1} \leftarrow \bar{x}$

sinon

Résoudre $SP^k(x^\nu)$, pour tout $k \in \{1 \dots K\}$

Chercher π^{kl} et ajouter une coupe d'optimalité par scénario pour borner θ

Résoudre le problème maître augmenté (solution : \bar{x})

$x^{\nu+1} \leftarrow \bar{x}$

finsi

fin tantque

L'algorithme ne boucle pas indéfiniment, puisqu'une fois que toutes les coupes ont été ajoutées (et elles sont en nombre fini), nous sommes en présence d'un problème équivalent au problème d'origine.

3.2.3 Bilan de la méthode L-shaped et comparaison avec d'autres méthodes

Nous avons vu ici les problèmes linéaires stochastiques en deux étapes et une méthode efficace de résolution en nombres réels. Concernant les problèmes linéaires stochastiques en deux étapes en nombre entier, Birge et Louveaux [4] présentent dans leur ouvrage une méthode lourde et peu utilisée en pratique. D'autres algorithmes existent aussi et sont repris dans le chapitre de Sherali et Zhu [17]. Nous ne rentrerons pas dans le détail de ces algorithmes car pour les problèmes que nous traiterons dans la suite de ce document, ils ne sont pas adaptés en raison du nombre de variables et de contraintes. Nous choisissons donc, pour notre problème défini dans le chapitre 4, d'utiliser une méthode heuristique de résolution proposée par Pacqueau [12].

3.3 Heuristique

3.3.1 Description

L'heuristique est présentée sur la figure (3).

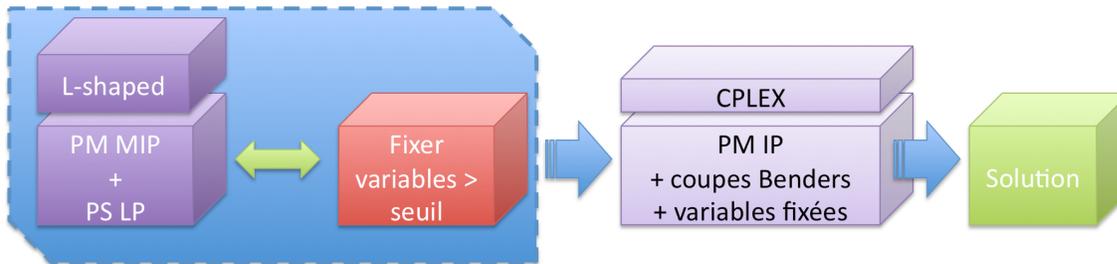


FIGURE 3 – Description de l'heuristique

La première étape de l'heuristique consiste à résoudre une relaxation linéaire du problème complet avec la méthode L-shaped décrite ci-dessus (chapitre 3.2), puis à fixer *toutes* les variables dont la partie fractionnaire est supérieure à un seuil déterminé à l'entier supérieur (par exemple la valeur 0,8 semble bien fonctionner dans le cas du problème d'optimisation stochastique d'horaires de personnel [12]). On résout alors à nouveau avec la méthode L-shaped le problème relaxé en tenant compte des variables fixées à l'étape précédente. Ce processus est itéré jusqu'à l'obtention de deux solutions consécutives identiques ou que toutes les variables aient été fixées.

Remarque 5 *Au début de chaque itération de la boucle, qui consiste à appliquer l'algorithme L-shaped puis à fixer les variables, on prend soin de rajouter les coupes de Benders déjà calculées aux étapes précédentes. En effet, celles-ci sont toujours valides, et les rajouter dès le début de l'algorithme L-shaped permet de diminuer de manière significative le temps de calcul (amélioration d'un facteur 10).*

A la fin de ces itérations, on récupère un problème maître de la forme :

$$\begin{aligned}
 (PM) \quad \min \quad & c^T x + \theta \\
 & Ax = b \\
 & \text{variables fixées} \\
 & \text{coupes de Benders}
 \end{aligned}$$

Comme dit plus haut (cf 4), la méthode L-shaped revient à minorer la fonction recours (représentée par θ) par des hyperplans. Elle s'arrête lorsque cette minoration est une égalité pour la solution maître envisagée.

L'heuristique constitue une approximation dans la mesure où la minoration trouvée par la méthode de Benders est assimilée à la « vraie » valeur de θ .

L'heuristique constitue une approximation dans la mesure où la minoration trouvée par la méthode de Benders est assimilée à la « vraie » valeur de θ . En effet, à chaque itération les sous-problèmes relaxés (LP) sont résolus et génèrent des coupes que l'on introduit directement dans le (PM), en conservant les coupes de Benders déjà accumulées.

Pour un nombre de scénarios adapté, le problème (PM) peut être résolu en nombres entiers par CPLEX. Il comporte en effet un nombre acceptable de variables : au maximum il contient le nombre de variables du problème non stochastique plus le nombre de scénarios. Et on peut supposer que le nombre de variables du problème initial non stochastique est suffisamment faible pour que ce problème puisse être résolu en nombres entiers en un temps raisonnable.

Il faut garder à l'esprit que la solution trouvée peut avoir un coût *inférieur* à l'optimum réel, car θ est sous-estimé. Mais grâce à cette heuristique, on diminue énormément le nombre de variables de chaque problème que l'on donne à résoudre à un solveur comme CPLEX.

3.3.2 Application à notre modèle

Nous reviendrons sur ce point au chapitre suivant (cf 4) après avoir présenté notre modèle.

4 Formulation du modèle

4.1 Introduction

Comme nous l'avons évoqué dans le chapitre 1, l'idée de base est de regarder si un échange des avions affectés aux vols quelques temps (jours/semaines) avant la date effective des opérations pourraient permettre d'augmenter les revenus de la compagnie aérienne.

Notre modèle consiste à déterminer, dans un réseau particulier (réseau en étoile), et à partir de données d'une saison passée, le gain potentiel supplémentaire que la compagnie pourrait obtenir en développant une nouvelle approche d'affectation des types d'avion aux vols.

4.1.1 Modèle

Nous allons définir les notions que nous utilisons pour formuler notre modèle :

Definition 1 Réseau en étoile

Un tel réseau présente la caractéristique que la plupart des itinéraires d'avions passe par un ou plusieurs aéroports, appelé hub.

La figure 4¹ montre un exemple du réseau en (*hubs & spokes*) dans lequel les aéroports de Paris et d'Amsterdam constituent les *hubs*.

Dans un réseau en étoile, la grande majorité des connections entre les vols a lieu au niveau des *hubs*.

Definition 2 Banque

A chaque hub, les arrivées et les départs ont lieu durant une plage horaire déterminée, afin d'augmenter les possibilités de connexions. On définit une banque $k_h^{d,f}$ comme l'intervalle de temps $[d, f]$ durant lequel des vols arrivent puis repartent du hub h . Pour chaque hub h , on note K_h l'ensemble des banques qui lui sont associées.

Definition 3 Boucle

Dans un tel réseau, on remarque qu'en pratique une grande partie des itinéraires d'avions peut être décomposée en une suite de vols qui commencent à un hub h_1 et arrivent à un hub h_2 . Le plus souvent $h_1 = h_2$, et alors

1. Carte des destinations extraite du site de Air France : www.airfrance.fr/FR/fr/common/guidevoyageur/reseau/reseau_airfrance_airfrance.htm

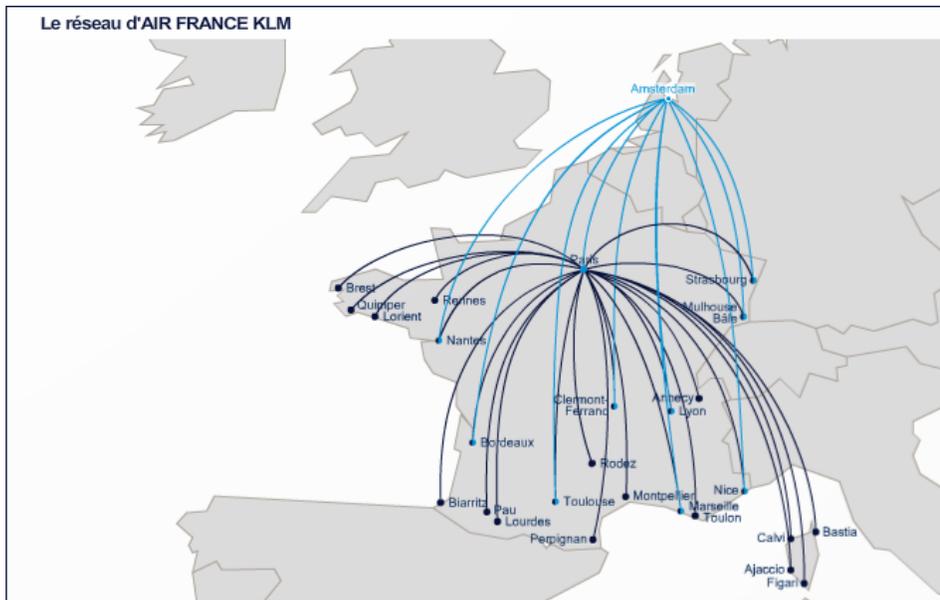


FIGURE 4 – Réseau régional Air-France KLM

ces portions sont des boucles. Par extension, on appellera boucles ces portions d'itinéraire, même lorsque $h_1 \neq h_2$. Elle est donc caractérisée par sa banque de départ, sa banque d'arrivée, et la liste des vols effectués.

Definition 4 *Boucle élémentaire* On définit une boucle élémentaire comme une boucle qui débute à un hub h_1 et termine à un hub h_2 , et ne passe par aucun autre hub au cours de son itinéraire.

Comme nous l'avons vu dans la revue de littérature (cf chapitre 2), il y a deux remarques que l'on peut faire sur les modèles de réaffectation proposés : la première est que les scénarios utilisés pour résoudre le problème de manière stochastique sont générés indépendamment sur des legs distincts. Le second point est que, à l'exception de [8] qui considèrent une réaffectation conjointe de l'horaire de vols et de l'affectation des types d'avion, la seule autre réaffectation envisagée est celle qui conserve l'assignation des équipages aux vols.

Une des originalités de notre modèle est qu'il repose sur l'hypothèse qu'il existe une corrélation entre différents vols. Cette corrélation peut être positive : par exemple l'affluence sur les vols est plus importante le lundi et le vendredi. A contrario, cette corrélation peut également être négative. Par exemple si on considère un nombre constant de voyageurs *loisir*, on peut penser que si la demande est forte sur une destination pour un vol, elle est plus faible sur les autres vols au cours de cette même journée.

Ensuite, nous considérons une autre manière de faire des échanges : nous autorisons deux avions, initialement affectés à des boucles différentes à être interchangeables, à condition que ces boucles aient la même banque de départ et d'arrivée. Ainsi, les équipages peuvent être maintenus dans les avions dans lesquels ils avaient initialement été assignés sans que le reste de la planification ne soit affectée. Ce type d'échange permet de définir la notion de boucles compatibles.

Definition 5 *Boucles compatibles*

Deux boucles b_1 et b_2 sont dites compatibles si elles ont la même banque de départ, la même banque d'arrivée, et qu'il existe au moins deux types d'avion différents qui peuvent effectuer chacune des deux boucles au complet.

Ainsi, notre stratégie d'affectation stochastique des types d'avion aux vols est de déterminer la meilleure affectation initiale possible, c'est à dire celle qui nous permettra d'optimiser l'espérance de gain grâce au recours. Pour ce faire, nous considérons des scénarios qui tiennent compte de la corrélation entre les vols. Nous renvoyons le lecteur au chapitre 5 pour plus de précisions sur la génération des scénarios.

Notre modèle ne prends pas en compte le *no-show* (passagers qui ne se présentent pas) ni le *surbooking*.

4.1.2 Notations

Voici la nomenclature des notations utilisées :

Paramètres :

- H : ensemble des aéroports qui sont des hubs,
- S : ensemble des aéroports qui ne sont pas des *hubs*,
- K_h : ensemble des banques associées au hub h , $h \in H$,
- K : ensemble des banques (ie $\{k \in K_h \mid h \in H\}$),
- Ω : ensemble des scénarios,
- B : ensemble des boucles réalisées par des avions pour la saison observée,
- C_{k_1, k_2} : ensemble des boucles compatibles avec $k_1 \in K_{h_1}$ et $k_2 \in K_{h_2}$, où $h_1, h_2 \in H$,
- F_b : ensemble des vols f d'une boucle b ,
- T : ensemble des types d'avions,
- r_f : revenu moyen par passager des billets vendus sur le vol $f \in F$,
- c_t^{fix} : coûts fixes de l'avion de type t ,
- c_t^{var} : coûts variables de l'avion de type t (en fonction de la distance),
- d^f : distance du vol $f \in F$,
- p_ω : probabilité d'occurrence du scénarios $\omega \in \Omega$,
- γ_t : capacité (nombre de places) d'un avion du type t ,
- $c^{éch}$: coût d'échange du type d'avion d'une boucle,
- $e_{f,b}$: égal à 1 si $f \in b$, 0 sinon.

Les variables de décision sont les suivantes :

Variables du problème maître :

- $x_{t,k}$: nombre d'avions du type t au hub h à la banque k avec $t \in T$, $h \in H$ et $k \in K_h$, dans la configuration initiale,
- $y_{t,b}$: égal à 1 si le type d'avion t est affecté à la boucle b , avec $t \in T$ et $b \in B$, 0 sinon, dans l'affectation initiale.

Variables du sous-problème :

- $z_{t,b}^\omega$: égal à 1 si le type d'avion t est affecté à la boucle b , avec $t \in T$ et $b \in B$, 0 sinon, après le recours, dans le scénario ω ,
- D_f^ω : demande dans le scénario ω ,
- u_f^ω : nombre de billets vendus sur chaque vol f dans le scénario ω ,
- Δ^ω : nombre de boucles sur lesquelles on a changé l'avion dans le scénario ω ,
- $\delta_b^{\omega+}$: égal à 1 si ($z_{t,b}^\omega = y_{t,b} + 1$), 0 sinon (c'est-à-dire que $\delta_b^{\omega+}$ vaut 1 si on met un avion de type t sur la boucle b dans le scénario ω mais qu'il n'y en avait pas dans l'affectation initiale,
- $\delta_b^{\omega-}$: égal à 1 si $z_{t,b}^\omega = y_{t,b} - 1$, 0 sinon (c'est-à-dire que $\delta_b^{\omega-}$ vaut 1 si on met un avion de type t sur la boucle b dans l'affectation initiale mais qu'il n'y en avait pas dans le scénario ω).

4.1.3 Formulation

Avec ces notations, le problème que nous proposons se formule de la manière suivante :

$$(P) \min \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega \left[\sum_{\substack{b \in B \\ f \in b}} (c_t^{fix} + c_t^{var} d^f) (y_{t,b} + \delta_b^{\omega+} - \delta_b^{\omega-}) \Delta^\omega c^{éch} - u_f r_f \right] \quad (31)$$

$$\text{s.c.} \quad \sum_{\substack{h' \in H \\ k' \in K_{h'}}} \sum_{b \in C_{k,k'}} y_{t,b} = \sum_{\substack{h' \in H \\ k' \in K_{h'}}} \sum_{b \in C_{k',k}} y_{t,b} = x_{t,k}, \quad \forall t \in T, k \in K \quad (32)$$

$$\sum_{\substack{h' \in H \\ k' \in K_{h'}}} \sum_{b \in C_{k',k}} z_{t,b}^{\omega} = \sum_{\substack{h' \in H \\ k' \in K_{h'}}} \sum_{b \in C_{k',k}} z_{t,b}^{\omega} = x_{t,k}, \quad \forall \omega \in \Omega, t \in T, k \in K \quad (33)$$

$$u_f^{\omega} \leq D_f^{\omega} \quad \forall \omega \in \Omega, b \in B, f \in F_b \quad (34)$$

$$\sum_{t \in T} y_{t,b} = 1 \quad \forall b \in B \quad (35)$$

$$\sum_{t \in T} z_{t,b}^{\omega} = 1 \quad \forall b \in B, \omega \in \Omega \quad (36)$$

$$u_f^{\omega} \leq \gamma_t \sum_{b \in B} e_{f,b} z_{t,b}^{\omega} \quad \forall \omega \in \Omega, b \in B, f \in b \quad (37)$$

$$z_{t,b}^{\omega} = y_{t,b} + \delta_b^{\omega+} - \delta_b^{\omega-} \quad \forall \omega \in \Omega, b \in B, t \in T \quad (38)$$

$$\delta_b^{\omega+} + \delta_b^{\omega-} \leq 1 \quad \forall \omega \in \Omega, b \in B, t \in T \quad (39)$$

$$\Delta^{\omega} = \sum_{b \in B} (\delta_b^{\omega+} + \delta_b^{\omega-}) \quad \forall \omega \in \Omega \quad (40)$$

$$x_{t,k} \in \mathbb{N} \quad (41)$$

$$y_{t,b} \in \{0, 1\}, z_{t,b}^{\omega} \in \{0, 1\}, \delta_b^{\omega+} \in \{0, 1\}, \delta_b^{\omega-} \in \{0, 1\} \quad \forall \omega \in \Omega \quad (42)$$

$$b \in B, t \in T, k \in K \quad (43)$$

Les contraintes (32) traduisent la conservation du nombre d'avions de chaque type à chaque banque dans la première affectation (décision initiale). Les contraintes (33) traduisent la conservation du nombre d'avions de chaque type à chaque banque dans la deuxième affectation (recours) dans le scénario ω . Les contraintes (34) modélisent le fait que l'on ne peut pas vendre plus de billets que la demande dans le scénario ω (pas de surbooking). Les contraintes (35) et (36) imposent qu'il n'y ait qu'un type d'avion affecté à un vol dans la première affectation et dans la deuxième affectation. Les contraintes (37) sont des contraintes de capacités liées aux nombres de place dans un avion de type t . Les contraintes (38), (39), et (40) sont des contraintes qui permettent de définir les écarts entre les variables primaires $y_{t,b}$ et les variables secondaires $z_{t,b}^{\omega}$. Les contraintes (41) sont les contraintes d'intégrité.

On remarque que la contrainte (39) peut être retirée car le coefficient dans l'objectif de Δ^{ω} est positif et qu'il s'agit d'un problème de minimisation.

4.1.4 Résolution

Les sous-problèmes (SP^{ω}) associés à chaque scénario ω sont les suivants :

Sous-problème ω

$$(SP^{\omega}) \min \sum_{\substack{b \in B \\ f \in b}} (c_t^{fix} + c_t^{var} d^f) (y_{t,b} + \delta_b^{\omega+} - \delta_b^{\omega-}) \Delta^{\omega} c^{ech} - u_f r_f$$

$$\text{s.c.} \quad \sum_{\substack{h' \in H \\ k' \in K_{h'}}} \sum_{b \in C_{k',k}} z_{t,b}^{\omega} = \sum_{\substack{h' \in H \\ k' \in K_{h'}}} \sum_{b \in C_{k',k}} z_{t,b}^{\omega} = x_{t,k}, \quad \forall \omega \in \Omega, t \in T, k \in K$$

$$u_f^{\omega} \leq D_f^{\omega} \quad \forall \omega \in \Omega, b \in B, f \in F_b$$

$$\sum_{t \in T} z_{t,b}^{\omega} = 1 \quad \forall b \in B, \omega \in \Omega$$

$$u_f^{\omega} \leq \gamma_t \sum_{b \in B} e_{f,b} z_{t,b}^{\omega} \quad \forall \omega \in \Omega, b \in B, f \in b$$

$$z_{t,b}^{\omega} = y_{t,b} + \delta_b^{\omega+} - \delta_b^{\omega-} \quad \forall \omega \in \Omega, b \in B, t \in T$$

$$\delta_b^{\omega+} + \delta_b^{\omega-} \leq 1 \quad \forall \omega \in \Omega, b \in B, t \in T$$

$$\Delta^{\omega} = \sum_{b \in B} (\delta_b^{\omega+} + \delta_b^{\omega-}) \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$\begin{aligned} z_{t,b}^{\omega} &\in \{0, 1\}, \delta_b^{\omega+} \in \{0, 1\}, \delta_b^{\omega-} \in \{0, 1\} & \forall \omega \in \Omega \\ b &\in B, t \in T, k \in K \end{aligned}$$

On peut donc appliquer l'heuristique [12] vue dans le chapitre 3. Cette méthode ne calcule pas directement les solutions des problèmes secondaires, mais celles-ci ne sont pas importantes, si ce n'est pour l'évaluation du coût réel de la solution. En effet, la décision importante est la décision primaire. Les décisions secondaires seront prises durant la saison, et sont individuellement très rapides à calculer dès que l'on a connaissance de la solution du problème maître (ie les variables primaires).

On peut également avancer que le fait de résoudre la relaxation continue des problèmes secondaires alors qu'il s'agit de problèmes en nombres entiers nous conduit à des solutions sous-optimales. Pacqueau [12] présente deux arguments permettant de prédire que cela aura un impact négligeable sur les solutions obtenues. Ces arguments s'appliquent également à notre problème :

- Dans notre cas, d'après différents travaux de recherche, le gap d'intégrité est faible. De plus, on peut émettre l'hypothèse qu'il n'y aura pas un recours avec une fréquence supérieure à 10%. Donc même si le gap d'intégrité est de 1%, cela représente 0.1% environ du coût total : l'erreur commise est donc négligeable.
- Les scénarios ont un effet « moyennant » qui diminue l'influence du gap d'intégrité.

4.1.5 Génération des scénarios

Il nous reste à expliquer comment des scénarios tenant compte de la corrélation entre les demandes de différents vols peuvent être générés. C'est ce que nous allons analyser dans le chapitre suivant.

5 Preuve de concept et applications pratiques

5.1 Preuve de concept à partir des données d'une saison réelle

Si nous disposions des données réelles d'une saison, nous pourrions déterminer le gain maximum de cette stratégie sur cette saison.

5.1.1 Scénarios réels et demandes réelles

Une solution pour éprouver notre modèle consiste à utiliser des scénarios réels d'une saison donnée. Une saison de 3 mois est composée de 13 semaines environ. Nous aurons donc un ensemble Ω de cardinal 13. Nous verrons par la suite des pistes possibles pour générer de plus nombreux scénarios.

Il nous reste alors à déterminer à partir des données de la saison la demande réelle sur chaque vol (par exemple, sur le vol Paris–Toulouse du lundi matin 8h). Cela n'est pas aussi simple si certaines semaines le vol était complet. En effet, il est alors difficile de savoir quelle était la demande réelle, puisque la demande est *tronquée* par la capacité de l'avion. Nous disposons pour chaque vol de 13 échantillons pour le nombre de passagers et nous devons déterminer la demande détronquée pour chacun des 13 scénarios.

Nous considérons avec une bonne approximation que la demande pour chaque vol sur une saison est modélisable par une gaussienne tronquée. Ainsi, pour chaque vol la médiane sur les 13 échantillons du nombre de passagers est la moyenne de la gaussienne détronquée, et l'écart type des 13 valeurs est l'écart type de cette gaussienne. La figure 5 illustre ce modèle.

5.1.2 Résultats

Nous n'avons cependant pas réussi à obtenir des données réelles, donc nous n'avons pas pu tester notre modèle.

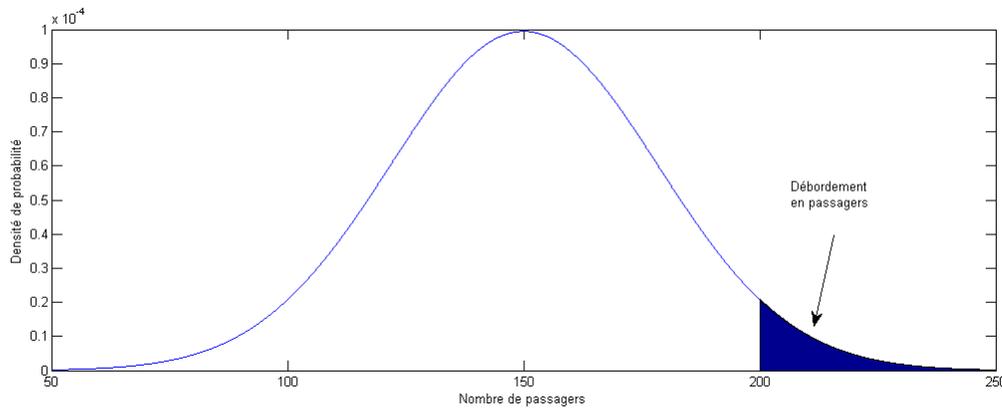


FIGURE 5 – Modélisation de la demande en passagers sur un vol : loi gaussienne tronquée

5.2 Génération de scénarios

Cependant, nous aimerions pouvoir renforcer cette preuve de concept en générant un plus grand nombre de scénarios. Une piste proposée est, pour chaque scénario, de faire une analyse en composante principale de la demande détronquée sur tous les vols de la semaine. Nous pouvons estimer alors que les premières composantes traduisent une tendance robuste de la demande, et mettent en avant les corrélations importantes à prendre en compte.

5.3 Piste de recherche : utilisation pour une saison future

Il reste cependant à proposer une solution pour appliquer ce modèle pour une saison future, c'est à dire proposer une manière de générer des scénarios. Nous pensons que la génération de scénarios sur un modèle similaire à celui proposé dans [10] pour la génération d'horaires de personnels est pertinent. L'idée principale serait de parvenir à décomposer la demande selon des composantes de différents ordres, et de pouvoir générer des scénarios qui correspondent à une même demande moyenne, mais aussi de pouvoir générer des scénarios de demandes futures qui prennent en compte les diverses estimations des compagnies aériennes. Cela semble pertinent, car le modèle d'analyse d'une saison donnerait un comportement de la demande en passagers, qu'il faudrait recalibrer pour une autre saison, en fonction des tendances anticipées. Cette piste de recherche représente un travail conséquent, et nous n'avons pas abordé ce point plus en détail.

6 Conclusion

6.1 Synthèse des travaux

Notre travail a consisté à proposer un modèle plus réaliste d'affectation stochastique des types d'avion. Pour le résoudre, nous proposons comme méthode d'appliquer une heuristique récente pour réaliser la preuve de concept. Il est original aussi par le recours proposé (conserver les équipages dans les avions, plutôt que de changer les types d'avions et conserver les équipages sur les vols).

6.2 Limitations de la solution proposée

En l'absence de données réelles, nous n'avons pas pu tester notre méthode ni finir la preuve de concept. Nous n'avons pas non plus tester la faisabilité de notre méthode de résolution. Nous avons aussi passé sous silence la recherche de boucles compatibles dans le réseau. Cela est très simple à réaliser dans un réseau *hub & spoke*. Cette détermination est plus complexe dans un réseau mixte, avec de nombreux *hubs* comme c'est le cas des réseaux des compagnies nord-américaines.

De plus, nous avons simplement proposé une méthode qui permet de déterminer les gains *potentiels* sur une saison passée. Mais nous n'avons pas terminé de déterminer une méthode qui permette, pour une saison future, de déterminer la meilleure affectation initiale pour que notre stratégie soit optimale.

Enfin, les gains obtenus par ces stratégies doivent être regardés aussi sous l'angle du *revenue management*, qui peut tendre à réduire les écarts dans la demande. En effet, nous avons considéré un revenu moyen par passager. Dans la réalité, pour un même nombre de places disponibles, si pour un vol la demande est plus forte que prévue, le revenu par passager sera plus important que pour un vol dont la demande est moins forte. Ainsi, un système de tarification bien géré peut *capter* une partie des gains de notre stratégie.

6.3 Améliorations futures

Comme nous l'avons évoqué dans la troisième partie, le modèle en tant que tel ne nous permet pas de concevoir une proposition d'affectation pour une saison future, car il est difficile de trouver une méthode de génération de scénarios. Nous n'avons pas non plus envisagé la période à laquelle la réaffectation était optimale. Dans ce cas, les demandes sur les vols dans chaque scénario ne seraient pas connues parfaitement. Les pistes de recherche possibles portent sur ces différents points.

Références

- [1] Cynthia Barnhart, Natashia L. Boland, Lloyd W. Clarke, Ellis L. Johnson, George L. Nemhauser, and Rajesh G. Sheno. Flight string models for aircraft fleet and routing. *Transportation Science*, 32(3) :208–220, 1998.
- [2] J-F. Benders. Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. *Numerische Mathematik*, 4 :238–252, 1962.
- [3] Matthew E. Berge and Craig A. Hopperstad. Demand driven dispatch : A method for dynamic aircraft capacity assignment, models and algorithms. *Operation Research*, 41 :153–168, 1993.
- [4] J-R. Birge and F. Louveaux. *Introduction to stochastic programming*. Springer, 1997.
- [5] Ebru K. Bish, Rawee Suwandechochai, and Douglas R. Bish. Strategies for managing the flexible capacity in the airline industry. *Naval Research Logistics (NRL)*, 51(5) :654–685, 2004.
- [6] Guy Desaulniers, Jacques Desrosiers, Yvan Dumas, Marius M. Solomon, and Francois Soumis. Daily aircraft routing and scheduling. *Management Science*, 43(6) :841–854, 1997.
- [7] David Ialongo. Design d'un réseau aérien : intégration de l'élaboration d'un horaire de vols et de l'affectation des types d'avion (proposition de recherche), 2010.
- [8] Hai Jiang and Cynthia Barnhart. Dynamic airline scheduling. *Transportation Science*, 43(3) :336–354, 2009.
- [9] Diego Klabjan. Large-scale models in the airline industry. In G. Desaulniers, J. Desrosiers, and M.M. Solomon, editors, *Column Generation*, pages 163–195. New York : Springer, 2005.
- [10] Antoine Legrain. Génération de scénarios pour la demande en personnels sur plusieurs périodes, 2011.
- [11] Ovidiu Listes and Rommert Dekker. A scenario aggregation-based approach for determining a robust airline fleet composition for dynamic capacity allocation. *Transportation Science*, 39(3) :367–382, 2005.
- [12] Rémi Pacqueau. Optimisation stochastique d'horaires de personnel, 2011.
- [13] Venkata L. Pilla, Jay M. Rosenberger, Victoria C. P. Chen, and Barry C. Smith. A statistical computer experiments approach to airline fleet assignment, 2005.
- [14] Brian Rexing, Cynthia Barnhart, Tim Kniker, Ahmad Jarrah, and Nirup Krishnamurthy. Airline fleet assignment with time windows. *Transportation Science*, 34(1) :1–20, 2000.
- [15] Hanif D. Sherali and Barbara M.P. Fraticelli. A modification of benders' decomposition algorithm for discrete subproblems : An approach for stochastic programs with integer recourse. *Journal of Global Optimization*, 22 :319–342, 2002. 10.1023/A :1013827731218.
- [16] Hanif D. Sherali and Xiaomei Zhu. Two-stage fleet assignment model considering stochastic passenger demands. *Operations Research*, 56(2) :383–399, 2008.
- [17] H.D. Sherali and X. Zhu. *Advances in Applied Mathematics and Global Optimization*, chapter 12 : Two-Stage Stochastic Mixed-Integer Programs : Algorithms and Insights. Springer Science, 2009.
- [18] R. Subramanian, Jr Scheff, R.P., J.D. Quillinan, D.S. Wiper, and R.E. Marsten. Coldstart : fleet assignment at delta air lines. *Interfaces*, 24(1) :104–120, 1994.