

The 0-th Column Generation Algorithm: a historical research

Ruslan Sadykov¹, Eduardo Uchoa²

¹Inria Bordeaux – Sud-Ouest, France

²Universidade Federal Fluminense, Brazil
Inria International Chair 2022-2026

May 19th, 2023

Column Generation Workshop, Montreal - Canada



Some Early Linear and Integer Programming Milestones

- First LP models [Kantorovich, 1939]
- Simplex algorithm for LP [Dantzig, 1947]
- Revised Simplex algorithm [Dantzig, 1953]
- LP on the solution of the TSP [Dantzig, Fulkerson, and Johnson, 1954]
- Dynamic Programming [Bellman, 1955]
- Cutting Plane algorithm for IP [Gomory, 1958]
- Branch-and-Bound algorithm [Land and Doig, 1960]

Adopted definition of Column Generation algorithm

Method to solve LPs with a large number of variables. Instead of explicitly evaluating reduced costs, it dynamically generates variables by **solving auxiliary optimization problems known as pricing subproblems**.

The 1st CG work [Ford Jr and Fulkerson, Management Science, 1958]

A SUGGESTED COMPUTATION FOR MAXIMAL MULTI-COMMODITY NETWORK FLOWS*

L. R. FORD, JR. AND D. R. FULKERSON

The RAND Corporation, Santa Monica, California

A simplex computation for an arc-chain formulation of the maximal multi-commodity network flow problem is proposed. Since the number of variables in this formulation is too large to be dealt with explicitly, the computation treats non-basic variables implicitly by replacing the usual method of determining a vector to enter the basis with several applications of a combinatorial algorithm for finding a shortest chain joining a pair of points in a network.

The 1st CG work [Ford Jr and Fulkerson, 1958]

Proposes a reformulation (fewer constraints, large number of variables) for handling some multi-commodity network flow problems too large for the simplex method, since their basis matrices would not even fit in the main memory of the computers. Pricing solved as shortest path problems

“Except for hand computation for a few small problems, we have no computational experience with the proposed method. Whether the method is practicable ... is a question that can only be settled by experimentation.”

The 2nd CG work [Dantzig and Wolfe, Operations Research, 1960]

DECOMPOSITION PRINCIPLE FOR LINEAR PROGRAMS[†]

George B. Dantzig and Philip Wolfe

The Rand Corporation, Santa Monica, California

(Received November 24, 1959)

A technique is presented for the decomposition of a linear program that permits the problem to be solved by alternate solutions of linear sub-programs representing its several parts and a coordinating program that is obtained from the parts by linear transformations. The coordinating program generates at each cycle new objective forms for each part, and each part generates in turn (from its optimal basic feasible solutions) new activities (columns) for the interconnecting program. Viewed as an instance of a 'generalized programming problem' whose columns are drawn freely from given convex sets, such a problem can be studied by an appropriate generalization of the duality theorem for linear programming, which permits a sharp distinction to be made between those constraints that pertain only to a part of the problem and those that connect its parts. This leads to a generalization of the Simplex Algorithm, for which the decomposition procedure becomes a special case. Besides holding promise for the efficient computation of large-scale systems, the principle yields a certain rationale for the 'decentralized decision process' in the theory of the firm.

The 2nd CG work [Dantzig and Wolfe, 1960]

The most fundamental CG paper!

Proposes the general DW decomposition for LP and shows how the reformulated LPs can be solved.

No computational results. Points out the cases (like the block-diagonal subproblem structure) where it “holds promise for the efficient computation of large-scale systems”

The 3rd CG work [Gilmore and Gomory, Operations Research, 1961, 1963]

A LINEAR PROGRAMMING APPROACH TO THE CUTTING-STOCK PROBLEM

P. C. Gilmore and R. E. Gomory

*International Business Machines Corporation,
Research Center, Yorktown, New York*

(Received May 8, 1961)

The cutting-stock problem is the problem of filling an order at minimum cost for specified numbers of lengths of material to be cut from given stock lengths of given cost. When expressed as an integer programming problem the large number of variables involved generally makes computation infeasible. This same difficulty persists when only an approximate solution is being sought by linear programming. In this paper, a technique is described for overcoming the difficulty in the linear programming formulation of the problem. The technique enables one to compute always with a matrix which has no more columns than it has rows.

The 3rd CG work [Gilmore and Gomory, 1961]

Considers the Cutting Stock Problem (CSP): given a set of m items, item j , $1 \leq j \leq m$, having length w_j and demand d_j ; produce the demand using the minimum number of stocks of length W .

The proposed formulation uses variables corresponding to the Q possible cutting patterns $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_Q$:

$$\min \sum_{q=1}^Q \lambda_q \quad (1a)$$

$$\text{s.t. } \sum_{q=1}^Q p_{qj} \lambda_q = d_j \quad j = 1, \dots, m \quad (1b)$$

$$\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{Z}_+^Q \quad (1c)$$

Linear relaxation solved by CG (knapsack pricing subproblems solved by Dynamic Programming), integer solutions by rounding

The 3rd CG work - part II [Gilmore and Gomory, 1963]

Reflecting on the practical experience of cutting rolls in a paper mill, a more advanced version of the method is described:

- Alternative methods for solving the knapsack subproblem
- Several additional practical issues, like limits on the number of cutting knives, are considered

Extensive computational results are presented and discussed

2D CSP started to be handled in [Gilmore and Gomory, 1965]

[Kantorovich, 1939], English translation published in Management Science, 1960

Leonid V. Kantorovich was a math prodigy, publishing his first papers at the age of 15

In 1934, at 22, he became a full professor at Leningrad (now Saint-Petersburg) University.

In 1938, he was given the task of optimizing production in a plywood plant

The resulting work would be recognized with the 1975 Nobel Prize in Economics (shared with T. Koopmans)



[Kantorovich, 1939], English translation published in Management Science, 1960

MATHEMATICAL METHODS OF ORGANIZING AND PLANNING PRODUCTION*†

L. V. KANTOROVICH

Leningrad State University

1939

Contents

Editor's Foreword.....	366
Introduction.....	367
I. The Distribution of the Processing of Items by Machines Giving the Maximum Output Under the Condition of Completeness (Formulation of the Basic Mathe- matical Problems).....	369
II. Organization of Production in Such a Way as to Guarantee the Maximum Ful- fillment of the Plan Under Conditions of a Given Product Mix.....	374
III. Optimal Utilization of Machinery.....	377
IV. Minimization of Scrap.....	379
V. Maximum Utilization of a Complex Raw Material.....	382
VI. Most Rational Utilization of Fuel.....	382
VII. Optimum Fulfillment of a Construction Plan with Given Construction Materials..	383
VIII. Optimum Distribution of Arable Land.....	384
IX. Best Plan of Freight Shipments.....	386
Conclusion.....	387
Appendix 1. Method of Resolving Multipliers.....	390
Appendix 2. Solution of Problem A for a Complex Case (The problem of the Plywood Trust).....	410
Appendix 3. Theoretical Supplement (Proof of Existence of the Resolving Multipliers)..	419

[Kantorovich, 1939] Contents

- Nine chapters giving LP models for production planning problems
- Appendix 1 - Method of Resolving Multipliers
 - “Lagrangean method” – dualize all constraints, adjust multipliers to obtain an optimal dual solution, recover primal solution
- Appendix 2 - Numerical solution of a large real LP from the plywood plant
- Appendix 3 - Theoretical Supplement
 - Algebraic and graphical proofs of the existence of optimal multipliers

[Kantorovich, 1939] Chapter IV - Minimization of Scrap = The Cutting Stock Problem

[Kantorovich, 1939] The Cutting Stock Problem

Let U be an upper bound on the optimal number of stocks.

Variable y_u indicates whether stock u is indeed used and variable

x_{ju} indicates how many copies of item j are cut from stock u .

$$\min \quad \sum_{u=1}^U y_u \quad (2a)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{u=1}^U x_{ju} = d_j \quad j = 1, \dots, m \quad (2b)$$

$$\sum_{j=1}^m w_j x_{ju} \leq W y_u \quad u = 1, \dots, U \quad (2c)$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^{mU}, \mathbf{y} \in \mathbb{B}^U \quad (2d)$$

Really bad formulation: Potential exponential size, linear relaxation only produces trivial LB, extreme symmetry. Yet, a DW decomposition of it can obtain the good Gilmore-Gomory formulation

[Kantorovich, 1939] The Cutting Stock Problem

Starting in the 1990s, many authors (including me) attributed this weak formulation to [Kantorovich, 1939, 1960].

[Kantorovich, 1939] The Cutting Stock Problem

Starting in the 1990s, many authors (including me) attributed this weak formulation to [Kantorovich, 1939, 1960].

WRONG

No trace of that formulation either in the original Russian version or in its widely available English translation!

Instead, Kantorovich proposed Gilmore-Gomory formulation, but assuming that the number of cutting patterns was small enough so they could be enumerated by hand.

[Kantorovich, 1939], First CSP example

$m = 3$, $w = (2.9 \ 2.1 \ 1.5)$, $d = (100 \ 100 \ 100)$, and $W = 7.4$. He enumerated the following cutting patterns:

MATHEMATICAL METHODS OF ORGANIZING AND PLANNING PRODUCTION 381

TABLE 7

I	II	III	IV	V	VI
2.9	2.9	2.1	2.9	1.5	2.9
1.5	2.9	2.1	2.1	1.5	2.1
1.5	1.5	1.5	2.1	1.5	1.5
1.5		1.5		2.1	
7.4	7.3	7.2	7.1	6.6	6.5

Then, he solved what in modern notation would be the following LP:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 \\
 & \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_6 = 100 \\
 & \quad + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 = 100 \\
 & 3\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + 3\lambda_5 + \lambda_6 = 100 \\
 & \lambda \geq 0
 \end{aligned}$$

Linear Programming banned in the Soviet Union!

Kantorovich had ambitious goals. He believed that LP could be used not only on local-level industrial problems but also for planning the whole Soviet economy!

- In 1942, he already had an advanced manuscript titled *The Best Use of Economic Resources* and submitted it to Gosplan, the powerful central economic planning agency
- After its strong rejection, he was forced to keep it unpublished

There were practical objections to Kantorovich's proposal (like "solving those large LPs would require vast human computational resources").

However, the rejection was due to ideological objections

First ideological objection: dual variables as prices

Dual variables may have a natural interpretation as prices

- The most zealous communists believed that prices were a harmful capitalist artifact that had no place in a socialist economy

In 1956, after Stalin's death, when Kantorovich could finally teach LP, he still cautiously used the name *objectively determined valuations* for dual variables (*objectively* was a widely used Marxist-Leninist jargon)

Second ideological objection: the role of labor

According to 19th-century Marx's Labor Theory of Value (LTV), **the value of a good is 100% determined by the amount of labor required to produce it.**

The trouble was that the models by Kantorovich include labor as a resource, at the same level as other resources like raw materials, machine availability, and energy.

- Again, some found that to be highly problematic, since it robbed from labor its unique status.

Actually, both ideological objections were related

LTV is central to Marxist Theory, which affirms that the dissociation between **price** and **value** is the mechanism used by capitalists to exploit the working class.

The Marxists in Gosplan were fanatical but not crazy!

The competing “capitalist” Marginalist Theory of Value (the standard theory of today) states that **the value of a good is given by how much gain one additional unit of it brings**

- Many economists believe that LP duality is consistent with that theory

Kantorovich work on specific kinds of LPs

Although unofficial, the ban on general LP was dead serious.

Economists were among the most persecuted groups of intellectuals during Stalin's rule, since their ideas could clash directly with the Communist Party orthodoxy

- World-famous economists could be sent to gulags and even executed (like Kondratiev (1892–1938))

Yet, during that period Kantorovich could publish (a bit) on specific LP applications

- Two papers on the transportation problem

Kantorovich work on specific kinds of LPs

Although unofficial, the ban on general LP was dead serious.

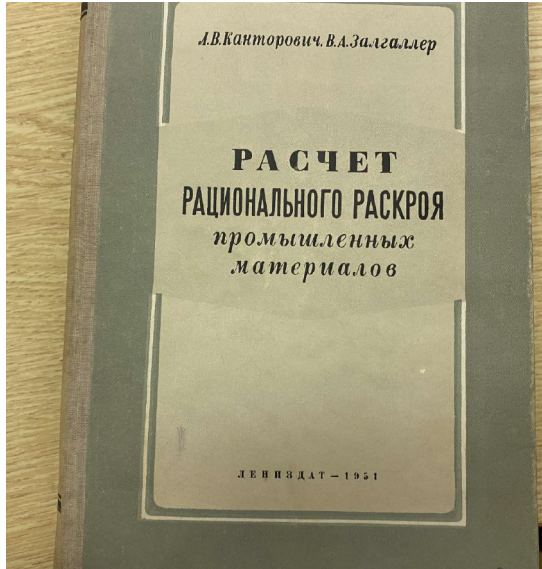
Economists were among the most persecuted groups of intellectuals during Stalin's rule, since their ideas could clash directly with the Communist Party orthodoxy

- World-famous economists could be sent to gulags and even executed (like Kondratiev (1892–1938))

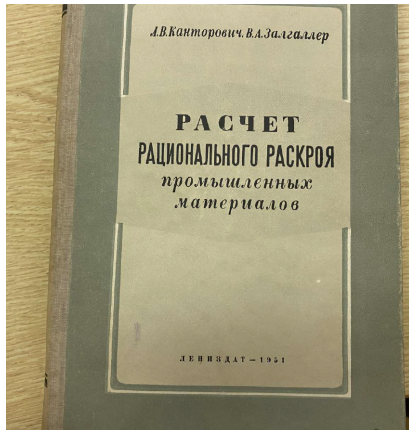
Yet, during that period Kantorovich could publish (a bit) on specific LP applications

- Two papers on the transportation problem
- A 200-page book only on the CSP!

[Kantorovich and Zalgaller, 1951], Rational Cutting of Industrial Materials

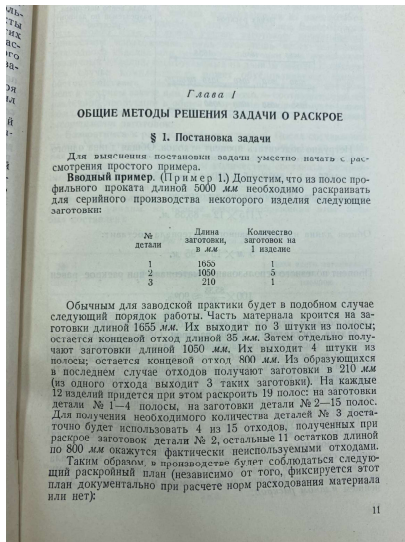


[Kantorovich and Zalgaller, 1951], A 200-page book only on the Cutting Stock Problem!



Copy of the first edition, photographed (page by page) by Alexander Lazarev in the Moscow State University library. Many thanks!

Chapter 1: General Methods for the Cutting Problem



Presents the LP model based on cutting patterns that will be used all over the book

Dual variables are called *indices*...

Chapter 1: General Methods for the Cutting Problem

Раскройный план № 1

№ п/п	Эскиз раскроя	Доля всего материала, разрезаемая по данному раскрою
1		4 19
2		4 19
3		11 19

Нетрудно подсчитать процент отходов. Общая длина одного комплекта заготовок на изделие составляет:

$$1655 \times 1 + 1050 \times 5 + 210 \times 1 = 7115 \text{ мм} = 7,115 \text{ м.}$$

Общая длина 12 комплектов заготовок:

$$7,115 \times 12 = 85,38 \text{ м.}$$

Общая длина израсходованного материала составит:

$$5 \text{ м} \times 19 = 95 \text{ м.}$$

Процент полезного использования материала при раскрое равен

$$100 \times \frac{85,38}{95} \approx 90\%.$$

Таким образом, отходы составят приблизительно 10%.

Задача составления плана раскроя. Обратим внимание на структуру составленного раскройного плана. Раскройный план состоит из перечня употребляемых способов раскроя одного целого исходного куска материала и указания на то, какая часть всего материала кроится по каждому из этих способов, при чем употребительность каждого из этих способов должна быть подобрана таким образом, чтобы весь раскройный план в целом давал заготовки в нужном ассортименте.

Таким образом, структура раскройного плана сохраняется и в случае листового или листового иного материала; всякий раз, составляя план раскроя, мы должны получить перечень нескольких употребляемых способов раскроя исходного целого куска материала и указать — какая доля всего материала кроится по каждому из этих способов. Именно такой документ мы называем в дальнейшем *планом раскроя*.

Гребуская комплектность — соотношение между искомым количеством заготовок каждого вида — рассмотренном примере деталей одного и того же изделия. Вместо этого материала может идти о любой группе заготовок допускающих резь может идти о любой группе заготовок допускающих совместное изготовление, будь это лишь часть заготовок для одного изделия или, наоборот, заготовок для нескольких изделий, изготовляемых на данном заводе. В последнем случае комплектность может обуславливаться такими обстоятельствами, как установленный по договору ассортимент в крупном заказе или, более широко, — соотношение долей различной продукции в общей программе завода. Вместо слова *комплектность* мы употребляем иногда слова *необходимый ассортимент* заготовок.

Возвратимся к рассмотренному примеру. После составления плана № 1 возникает естественный вопрос: нельзя ли, применяя какие-нибудь другие раскрои отдельных полос и употребляя эти раскрои в различном количестве, составить раскройный план таким образом, чтобы сохранить комплектность заготовок и получить меньший процент отходов?

В данном случае это возможно сделать. Вот такой план (ниже мы увидим, на основе каких соображений этот план был составлен).

Раскройный план № 2

№ п/п	Эскиз раскроя	Доля всего материала, разрезаемая по данному раскрою
1		2 3
2		1 3

По этому плану из каждого 3 полос материала получается 2 комплекта заготовок. (Две полосы разрезаются по первому раскрою, что дает 2 заготовки 1655 мм и 6 заготовок 1050 мм. Одна полоса кроится по второму раскрою, что дает еще 4 заготовки 1050 мм и 2 заготовки 210 мм. Полученные заготовки: 1655 мм — 2 шт., 1050 мм — 10 шт., 210 мм — 2 шт. — вполне обеспечивают 2 изделия.)

Процент полезного использования материала при раскрое в плане № 2 будет равен:

$$100 \times \frac{7,115 \times 2}{3 \times 3} \approx 95\%.$$

Presents the LP model based on cutting patterns that will be used all over the book

Chapter 1: General Methods for the Cutting Problem

The models are not viewed as IPs, so fractional use of a cutting pattern is OK. The modeling assumption is that item demands represent proportions.

- For example, a piece of furniture requires 2 copies of item 1, 4 copies of item 2, and 1 copy of item 3. The actual number of pieces that will be manufactured is unknown, as the factory will be operated for an undetermined period of time
- So, the CSP is solved with demands $d = (2 \ 4 \ 1)$. Its fractional solution will determine the proportions in which each cutting pattern should be used
- The CSP optimal solution value is the average number of stocks used per piece

Chapter 2: Cutting Linear (1D) Stocks

деловал. Упомянуто, что вычисления являются раскрой 1, 2, 3, 4. Можно попытаться угадать их оценки исходя из степеней близости, что и приведет нас к ряду 5. Оценка является следующей:

$$x = 0.3, y = 0.2, z = 0.1.$$

Среди этих выводов максимальная в удельных 4 раскроях, для которых она была сформулирована. Любой план, составленный из этих раскроев, будет давать один и тот же коэффициент использования материала.

В § 3 уже было составлено один из таких планов (план № 3). Приведем еще один из возможных вариантов.

План № 4

Раскрой	Поме на комплект	Чисть всего материала
$1400 \div 500 \times 3 + 650 \div 2$	1	2
$1400 \times 2 + 550 \times 2$	2	3

Глава II

РАСКРОЙ ЛИНЕЙНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПО ДЛИНЕ (ПРОФИЛЬНЫЙ ПРОКАТ, ТРУБЫ, БРУСКИ, ПОЛОСЫ)

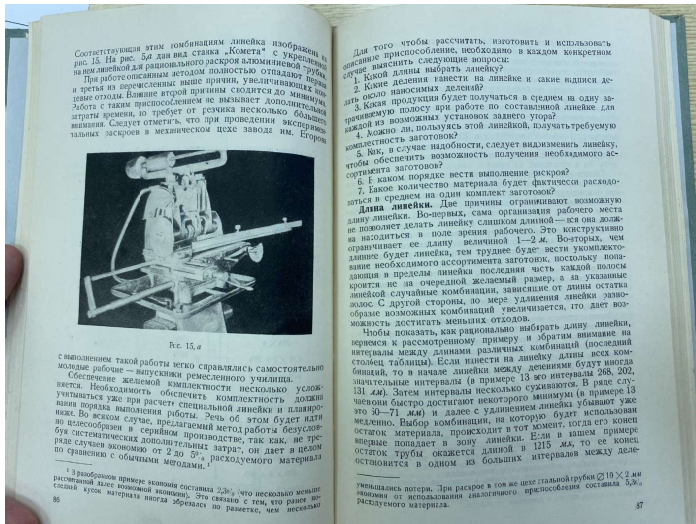
Конечные отходы при раскросе линейных материалов по длине менее ощутительны на производстве, чем потери при раскросе листовых материалов. В связи с этим увеличению конечных отходов уделяется меньше внимания. В то время как для листовых материалов составляются в той или иной мере детальные карты раскросов, для линейных материалов подобные документы обычно отсутствуют. В большинстве случаев ограничиваются тем, что при возможности получения мерного материала записывают длину, кратную длине наиболее крупных или особенно массовых заготовок.

Кроме того, попытки запланировать линейный раскрой нередко наталкивались на непостоянство длины поступающего материала, и план раскросов оказывался нереальным. Поэтому преимущественно придерживаются следующего порядка работы: сначала отрезают все самые крупные заготовки, потом переходят к более мелким, стараясь при этом использовать полученные ранние отходы, и т. д. Нетрудно увидеть, что этот простой принцип далеко не всегда ведет к наилучшим результатам, а потому должен быть заменен длинными, более трудными приемами работы, применение которых может дать существенный эффект.

Перейдем к исследованию задачи. Прежде всего следует четко различать задачи раскросов мерного материала, т. е. материала вполне определенной длины, и материала смешанных длин. Каждая из этих задач требует отдельного рассмотрения, и обе они постоянно встречаются в практике. (Задача раскросов смешанных длин встречается несколько чаще). Конечно всякий материал поступает не вполне одинаковыми длинами. Трубы, прутки, полосы, взятые даже из одной и той же партии материала, имеют некоторое различие по длине. Какой же материал следует считать мерным, какие различия в длинах — несущественными?

Материал будем считать мерным, если всякая комбинация

Chapter 2: Cutting Linear (1D) Stocks



Machines that can be used for cutting

Chapter 3: Cutting Rectangular (2D) Stocks

Материал смешанный, средний длины 5 м. Потери на оторочку 30 мм на замок. Минимальный размер заготовки, отрезаемой последней, 200 мм. Составить линейку для раскроя, установить средний процент отходов, 78,33% и 30 мм. Использовать на линейке только три размера: 78, 170 и 30 мм. Ответ. Отходы около 1%.
 8 Из волокон смешанных лент со средней длиной 4,5 м изготовляются в равном количестве заготовки длиной 600 и 65 мм. Раскрой производится на пресс. Ширина раскрываемого зажимного устройства около 200 мм. Составить линейку для рационального раскроя. Ответ. Отходы, включая потерю на оторочку, в среднем около 33 мм на ленту. Длина линейки от кромки ножа 1200 мм. Нанести всего три деления на расстоянии 600 мм с выделкой, 600* и на расстоянии 665 мм с выделкой 65. Порядок работы следующий: сначала кроить заготовку 600 мм, не лезя до требуемого количества столько штук, сколько оторочено концов. Затем кроить заготовки 65 мм, в первую очередь, используя оставшиеся концы. Из каждого остатка по мере необходимости получать еще по одной заготовке 600 мм.

9 Составить линейку для раскроя сухих заготовок:

Длина заготовки, в мм	Количество в комплекте
350	1
380	1
650	3
1800	2

Материал смешанный лент со средней длиной 5 м. Ответ. Длина линейки 160 мм (от ножа). Деления, соответствующие комбинации 350 X 2, 350 X 3, 380 X 3, чтобы избежать перепроизводства заготовок 350 мм.

10 Из волоконной стальной ленты шириной 150 мм требуется получить ленты следующих размеров:

Ширина ленты, в мм	Процент в составе готовой продукции (по весу)
1 мм	1
65	20
45	20
33	40

Составить наиболее экономичный план раскроя, обеспечивающий ассортиментный выход продукции. (При раскрое кромок шириной не менее чем по 3 мм.)

Ответ:

Установка ножей	Часть материала, расходуемая при лентной установке
65 + 45 + 33	44%
33 + 33 + 33 + 45	43%
45 + 45 + 45	13%

Указание. Предварительно перевести имеющиеся ассортиментные данные по весу в ассортиментные данные по соотношению лент. М.

Глава III

РАСКРОЙ ЛИСТОВЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ЗАГОТОВКИ

Листовые материалы поступают обычно в виде прямоугольных листов определенных размеров. К планированию их раскроя на комплекты заготовок для серийного производства в полной мере приложимы все общие соображения и методы, развитые в гл. I.

В этой главе мы остановимся на раскрое листов на прямоугольные заготовки. Эта задача является одной из наиболее распространенных, поскольку чаще при необходимости получать фигурные заготовки их обычно заключают предварительно в заготовки прямоугольной формы.

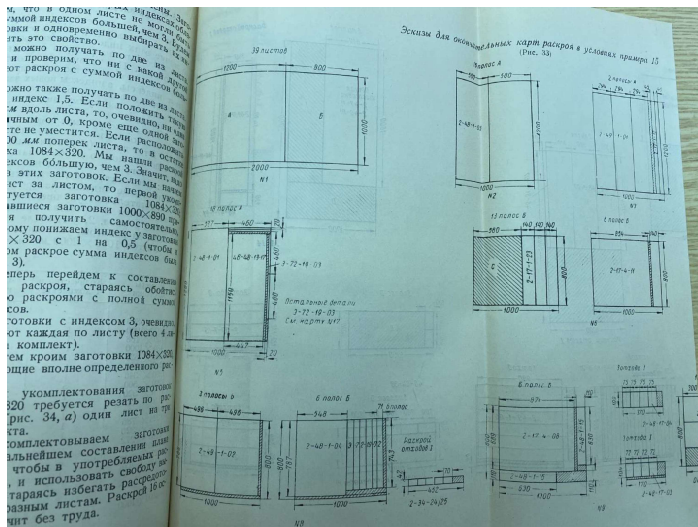
Простота формы прямоугольных заготовок не устраняет необходимости использования общих методов, но существенно упрощает их, позволяя использовать иные приемы, более быстро ведущие к цели. Таким упрощенным приемом, приспосабливаемым специально к случаю прямоугольных заготовок, и посвящена эта глава. Чтобы показать практическую сторону вещей, приемы иллюстрированы конкретными производственными задачами.

§ 1. Случай, когда задача сводится к линейному раскрою

Прямоугольная заготовка не всегда может быть расположена произвольно вдоль или поперек листа. Для некоторых заготовок необходимо соблюдать направление волокна (если речь идет о раскрое дерева или ткани); кроме того, заготовки, длина которых больше ширины листа, могут располагаться на листе лишь в одном определенном направлении. Может сказаться, что по условиям раскроя требуется значительное количество заготовок, которые не только располагаются на листе в определенном направлении, но и не могут в этом направлении следовать друг за другом, а должны быть

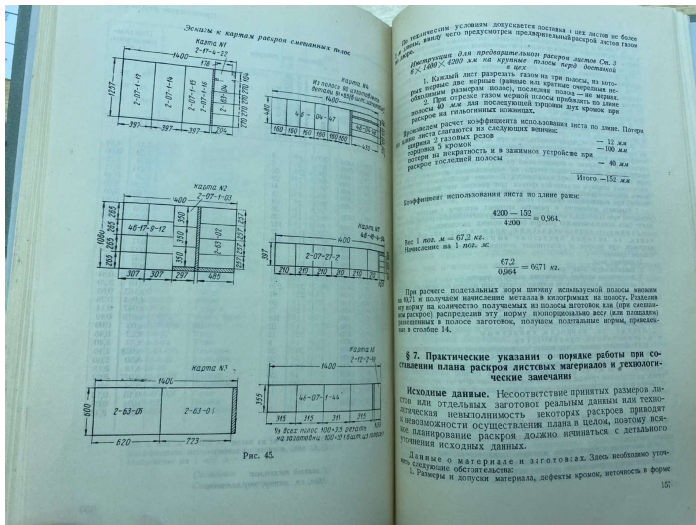
¹ В § 4 частично рассмотрен также вопрос о раскрое круглых заготовок.

Chapter 3: Cutting Rectangular (2D) Stocks



Rectangular items

Chapter 3: Cutting Rectangular (2D) Stocks



Chapter 3: Cutting Rectangular (2D) Stocks

Ширина оставшейся полосы: $1500 - 155 \times 8 = 260$ мм. Намного ее заполнить по ширине, очевидно, $155 - 95$ мм. Значит, для остатков (рис. 24), объединив раскрой, переставляя части, можно на полосе шириной 155 мм, а затем уже эти полосы разрезать по размеру 95 мм.

Оценка по площади показывает в этом примере, что не удастся разместить более 71 заготовки; оценка по индексам использования площади показывает, что не удастся разместить более 69 заготовок. Лучший из принятых раскroев дает 69 заготовок. Наиболее рациональный раскрой дал 69 заготовок. Наконец, и представляет собой достижимый в данном случае максимум. Рациональный раскрой в этом случае дает по сравнению с обычным 91% экономии.

Круглые заготовки. Как известно, наиболее плотным расположением кругов на неограниченной плоскости является наиболее простое расположение (рис. 25), а также расположение, при котором один ряд кругов несколько сдвинут в промежутке между кругами предыдущего ряда («шахматное» расположение, рис. 26). Если считать лист весьма большим, пренебрегая

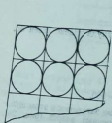


Рис. 25.

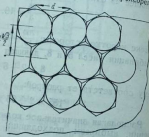


Рис. 26.

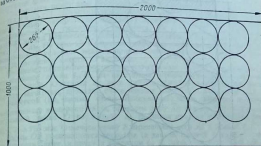
отходами по краям и считать, что круги плотно прилегают друг к другу, то при первом расположении используется, как это нетрудно подсчитать из чисто геометрических соображений, примерно 78,3% всей площади, а при втором расположении — около 90,7%.

Авторам неизвестен общий математический метод решения задачи о размещении максимального числа одинаковых кругов в прямоугольнике. Однако поскольку задача самостоятельного раскroя больших партий круглых заготовок встречается весьма часто, мы считаем уместным привести некоторые приемы, позволяющие практически успешно решать отдельные производственные задачи.

В написании этого раздела принял участие сотрудник Кировского завода Г. П. Рубинштейн, который, в частности, предложил и испытал на практике применение косых резов для повышения эффективности односторонней заготовки круглых заготовок.

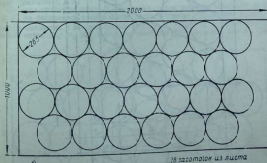
Поэтому при заготовках сравнительно малого диаметра (указывающихся в листе несколькими десятками раз) более экономным является «шахматное» расположение кругов.

Однако, когда из листа нужно выкашивать круглые заготовки более крупного диаметра (указывающегося всего несколькими разами поперек листа), то диаметр отхода по краям листа, так как они имеют существенную, а иногда и решающую роль при выборе оптимального расположения заготовок.



а)

71 заготовка из листа



86 заготовка из листа

Рис. 27.

Кроме того, весьма часто круглые заготовки получают путем штамповки из предварительно отрезанных полос. В последнем случае технологический процесс не позволяет использовать шахматное расположение заготовок в листе.

Chapter 3: Cutting Rectangular (2D) Stocks

Список и данные для раскроя заготовок, выходящих из														
№№ п/п	№ детали	Наименование детали	Кол-во деталей на лист	Вес, в кг		Размеры заготовки, а мм	Данные для раскроя							
				на 1 дет.	на 1 лист		размеры первоначаль- ной заготовки из стандарт- ного листа, а мм	колич- во заготов- ки на лист	колич- во заготов- ки на лист	колич- во заготов- ки на лист	колич- во заготов- ки на лист	колич- во заготов- ки на лист	колич- во заготов- ки на лист	Полный лист из а мм
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	46-41-6-10	Основание решетки	20	2,336	46,72	30 × 180	1820 × 1400	4	45	180	2,512	30,26	2,512	30,26
2	2-07-1-13	Гориз. ребро	6	2,83	10,98	45 × 110	1820 × 1400	1	6	30	2,044	13,28	2,044	13,28
3	2-07-1-12	Вертик. ребро	3	11,997	35,931	347 × 1230	1820 × 1400	1	6	30	12,48	37,44	12,48	37,44
4	2-07-1-14	"	1	11,997	11,997	347 × 1230	1820 × 1400	1	6	30	12,48	12,48	12,48	12,48
5	2-07-1-15	"	1	11,997	11,997	347 × 1230	1820 × 1400	1	6	30	12,48	12,48	12,48	12,48
6	2-07-1-16	"	1	11,997	11,997	347 × 1230	1820 × 1400	1	6	30	12,48	12,48	12,48	12,48
7	2-63-04	Косынка	1	1,222	10,578	204 × 190	1820 × 1400	2	16	16	1,41	11,28	1,41	11,28
8	2-17-4-22	Основание	1	3,052	31,240	265 × 307	1820 × 1400	1	3	3	3,238	26,26	3,238	26,26
9	46-17-9-12	Кольцо	1	1,383	1,383	264 × 129	1820 × 1400	1	3	3	1,46	1,46	1,46	1,46
10	2-07-1-03	Диафрагма	8	4,590	14,970	297 × 48	1820 × 1400	1	3	3	4,90	32,00	4,90	32,00
11	2-63-07	Ребро	3	2,811	28,928	257 × 48	1820 × 1400	1	3	3	3,19	15,70	3,19	15,70
12	2-13-1-04	Дно зольника	1	10,08	10,08	900 × 1400	1820 × 1400	1	1	1	10,45	10,45	10,45	10,45
13	2-13-1-12	Заледка зольника	1	4,368	4,368	650 × 1400	1820 × 1400	1	1	1	4,53	4,53	4,53	4,53
14	2-63-06	Косынки	4	17,836	71,434	600 × 60	1820 × 1400	1	1	1	18,31	77,24	18,31	77,24
15	2-63-01	Основание	4	20,833	83,292	600 × 75	1820 × 1400	1	1	1	22,52	90,08	22,52	90,08
16	2-07-27-20	Скоба	4	4,163	16,652	148 × 56	1820 × 1400	1	1	1	4,55	18,16	4,55	18,16
17	2-13-1-13	Заледка зольн. вертн.	1	3,696	3,696	530 × 1400	1820 × 1400	1	1	1	3,84	3,84	3,84	3,84
18	2-13-1-14	" " " " "	1	3,696	3,696	530 × 1400	1820 × 1400	1	1	1	3,84	3,84	3,84	3,84
19	46-04-47	Держатель	2	1,844	3,688	160 × 48	1820 × 1400	1	1	1	1,93	1,93	1,93	1,93
20	46-04-48	Планка	1	1,238	1,238	120 × 43	1820 × 1400	1	6	12	1,26	1,26	1,26	1,26
21	2-17-4-10	Бронштейн пр.	1	0,281	0,281	65 × 9	1820 × 1400	1	3	6	0,40	0,40	0,40	0,40
22	3-48-6-01	Труба	2	5,04	10,08	450 × 430	1820 × 1400	1	1	1	5,23	10,46	5,23	10,46
23	2-16-2-05	Планка юз.	2	1,653	3,306	80 × 430	1820 × 1400	1	1	1	1,76	1,76	1,76	1,76
24	2-16-2-06	"	1	1,653	1,653	80 × 430	1820 × 1400	1	1	1	1,76	1,76	1,76	1,76
25	2-16-4-03	"	1	1,653	1,653	80 × 430	1820 × 1400	1	1	1	1,76	1,76	1,76	1,76
26	2-07-27-21	Ребро	4	2,009	8,036	210 × 387	1820 × 1400	4	17	17	2,129	8,50	2,129	8,50
27	46-48-4-54	"	2	0,265	0,53	105 × 105	1820 × 1400	1	6	12	0,25	0,25	0,25	0,25
28	46-07-1-43	Распр. ребро	4	4,158	16,632	804 × 353	1820 × 1400	2	3	6	4,577	18,31	4,577	18,31
29	46-07-1-44	"	4	2,684	10,736	415 × 353	1820 × 1400	2	3	6	2,843	11,77	2,843	11,77
30	2-12-2-09	Шайба	1	0,568	0,568	100 × 35	1820 × 1400	3	4	24	0,63	0,63	0,63	0,63
31	2-26-36	Планка	1	0,34	0,34	50 × 19	1820 × 1400	3	4	24	0,39	0,39	0,39	0,39
32	2-14-2-25	Посадка	1	3,548	3,548	224 × 330	1820 × 1400	1	6	6	3,83	3,83	3,83	3,83
33	46-41-6-08	Тяга полки	10	0,461	4,61	30 × 330	1820 × 1400	1	6	6	0,485	4,85	0,485	4,85
34	46-17-5-03	Ребро жестк.	2	0,49	0,98	40 × 240	1820 × 1400	2	45	90	0,525	1,05	0,525	1,05
35	2-13-1-10	Ступенька	1	0,895	0,895	70 × 240	1820 × 1400	1	34	34	0,89	0,89	0,89	0,89
36	46-48-4-53	Стойка	1	1,104	1,104	115 × 200	1820 × 1400	1	19	18	1,16	1,16	1,16	1,16
37	49-49-3-01	"	1	1,104	1,104	115 × 200	1820 × 1400	1	12	6	0,98	0,98	0,98	0,98
38	46-48-4-52	Основание	2	0,038	1,878	15 × 170	1820 × 1400	1	12	12	0,98	0,98	0,98	0,98

The 0-th CG work [Kantorovich and Zalgaller, 1951]

The 0-th CG work [Kantorovich and Zalgaller, 1951]

The book proposes solving CSP
using Column Generation!

The 0-th CG work [Kantorovich and Zalgaller, 1951]

Optimality condition: the current LP solution is CSP-optimal if for all possible cutting patterns $p = (p_1, \dots, p_m)$ $\sum_{j=1}^m \pi_j p_j$ is not greater than 1 (π_j is the “index” of item j)

Enumeration of all patterns is not necessary, improving patterns may be identified by what we now call *reduced costs*

The 0-th CG work [Kantorovich and Zalgaller, 1951]

1D CSP instance: $m = 3$, $w = (140 \ 95 \ 65)$, $d = (2 \ 4 \ 1)$, and $W = 500$.

Starting solution using single-item patterns: $(3 \ 0 \ 0)$ with value $2/3$, $(0 \ 5 \ 0)$ with value $4/5$, $(0 \ 0 \ 7)$ with $1/7$, $cost \approx 1.61$

Better solution: $(3 \ 0 \ 1)$ with value $2/3$, $(0 \ 5 \ 0)$ with value $71/91$, $(0 \ 1 \ 6)$ with value $1/18$, $cost \approx 1.51$

Improving that solution: calculate the indices by solving

$$\begin{cases} 3\pi_1 & + \pi_3 = 1 \\ 5\pi_2 & = 1 \\ \pi_2 + 6\pi_3 & = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = 2/15 \\ \pi_2 = 1/5 \\ \pi_3 = 13/45. \end{cases}$$

By **solving an integer knapsack problem**, the improving pattern $(1, 3, 1)$ is found: $2/15 + 3/5 + 13/45 = 46/45 > 1$

The 0-th CG work [Kantorovich and Zalgaller, 1951]

Associate variables x , y , z to the current patterns and θ the new one. We have that:

$$\begin{cases} 3x & + \theta = 2 \\ 5y + z + 3\theta = 4 \\ x & + 6z + \theta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x & = 2 - \theta \\ 5y + z = 4 - 3\theta \\ x & + 6z = 1 - \theta \end{cases}$$

Solving the 3×3 linear system:

$$x = \frac{2 - \theta}{3}, \quad y = \frac{71 - 52\theta}{90}, \quad z = \frac{1 - 2\theta}{18}.$$

when θ increases, the first value which nullifies is z (when $\theta = \frac{1}{2}$). Thus $(0, 1, 6)$ is replaced by $(1, 3, 1)$. It can be deduced that $x = \frac{1}{2}$ and $y = \frac{1}{2}$. The cost of the new solution is thus 1.5.

The 0-th CG work [Kantorovich and Zalgaller, 1951]

Отсюда находим:

$$y = \frac{1}{3}, z = \frac{2}{13}, x = \frac{13}{45}.$$

Чтобы устранить дробные величины, увеличиваем полученные числа в 45 раз:

$$x = 13, y = 9, z = 6.$$

Теперь посмотрим, не дают ли какие-либо другие раскройки большей суммы индексов, чем применение. Для этого будем проверять не все, а некоторые, наиболее благоприятные раскрои. Запись ведем в виде следующей таблицы:

Таблица 1

	План № 1	План № 2	План № 3
Индексы $\begin{cases} \text{в } 1400 \text{ мм} \\ \text{заготовок} \\ \text{в } 950 \text{ мм} \\ \text{заготовок} \\ \text{в } 650 \text{ мм} \\ \text{заготовок} \end{cases}$		13 9 6	3 2 1
Сумма индексов в примененных раскрой		45	10
Сумма индексов заготовок одного комплекта		68	15
Число расходуемых на комплект полос	$\frac{169}{105} = 1,61$	$\frac{68}{45} = 1,51$	$\frac{15}{10} = 1,5$
Способы раскрой	Сумма индексов в различных возможных раскрой		
$1400 \times 3 + 650$	45	10	
$1400 \times 2 + 950 \times 2$	44	10	
$1400 \times 2 + 650 \times 3$	44	9	
$1400 + 950 \times 3 + 650$	46	10	
$1400 + 950 + 650 \times 4$	46	9	
950×5	45	10	
$950 \times 3 + 650 \times 3$	45	9	
$950 + 650 \times 6$	45	8	

Обнаружилось два раскрои, дающих большую сумму индексов, чем 45. (Уравнять их с примененными раскроями путем пересмотра индексов, очевидно, нельзя, так как никакого излишнего произвола, кроме произвола в множителе пропорциональности при выборе индексов, на этот раз не было.)

Остановимся на первом из раскroев: $1400 + 950 \times 3 + 650$. Какой из раскroев, использованных в плане № 2, следует заменить этим раскroем? На глаз видно, что многократное применение этого раскroя приведет к избытку заготовок в 650 мм

и сделает ненужным в первую очередь последний раскroй $950 + 650 \times 6$. Если мы это заметим, то можно прямо приступить к составлению плана № 3 из раскroев:

$$1400 \times 3 + 650, \\ 950 \times 1, \\ 1400 + 950 \times 3 + 650.$$

Если бы мы затруднились сделать такое заключение на глаз, то можно воспользоваться вычислительным приемом, который мы применим к данному случаю только для того, чтобы ознакомить с ним читателя.

Допустим, что по новому раскрою разрезается 6 полос на комплект. По старым трем раскроям пусть режется соответственно x, y, z полос:

Число заготовок в 1400 мм	Число заготовок в 950 мм	Число заготовок в 650 мм	Число полос, разрезаемых в среднем на 1 комплект
3	0	1	x
0	5	0	y
0	1	6	z
1	3	1	

Для удовлетворения комплектности необходимо должно быть:

$$3x + 6 = 2,$$

$$5y + z + 3 = 4,$$

$$x + 6z + 6 = 1.$$

Откуда находим выражения x, y, z через 6:

$$x = \frac{2-6}{3}; z = \frac{1-26}{18}; y = \frac{71-526}{90}.$$

Если мы будем увеличивать 6, то первым обратится в нуль число z , т. е., в связи с введением нового раскroя, прежде всего станет ненужным раскroй $950 + 650 \times 6$.

Это произойдет при $6 = \frac{1}{2}$. Кстати, мы получаем и данные нового раскroяного плана № 3:

$$z = 0; 6 = \frac{1}{2}; x = \frac{2-6}{3} = \frac{1}{2}; y = \frac{71-526}{90} = \frac{1}{2}.$$

The 0-th CG work [Kantorovich and Zalgaller, 1951]

Recalculate the indices by solving

$$\begin{cases} 3\pi_1 & + \pi_3 = 1 \\ & 5\pi_2 = 1 \\ \pi_1 + 3\pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = 3/10 \\ \pi_2 = 2/10 \\ \pi_3 = 1/10. \end{cases}$$

By solving another knapsack problem, it is shown that no improving pattern exists. The CSP solution is optimal.

The 0-th CG work [Kantorovich and Zalgaller, 1951]

Recalculate the indices by solving

$$\begin{cases} 3\pi_1 & + \pi_3 = 1 \\ & 5\pi_2 = 1 \\ \pi_1 + 3\pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = 3/10 \\ \pi_2 = 2/10 \\ \pi_3 = 1/10. \end{cases}$$

By solving another knapsack problem, it is shown that no improving pattern exists. The CSP solution is optimal.

The proposed CG does not use the Method of Resolving Multipliers. It uses something very similar to the Revised Simplex Algorithm [Dantzig, 1953]

The 0-th CG work [Kantorovich and Zalgaller, 1951]

Recalculate the indices by solving

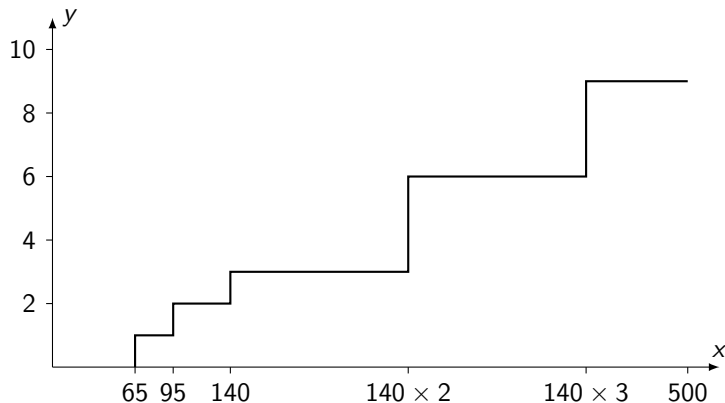
$$\begin{cases} 3\pi_1 & + \pi_3 = 1 \\ & 5\pi_2 = 1 \\ \pi_1 + 3\pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = 3/10 \\ \pi_2 = 2/10 \\ \pi_3 = 1/10. \end{cases}$$

By solving another knapsack problem, it is shown that no improving pattern exists. The CSP solution is optimal.

The proposed CG does not use the Method of Resolving Multipliers. It uses something very similar to the Revised Simplex Algorithm [Dantzig, 1953]

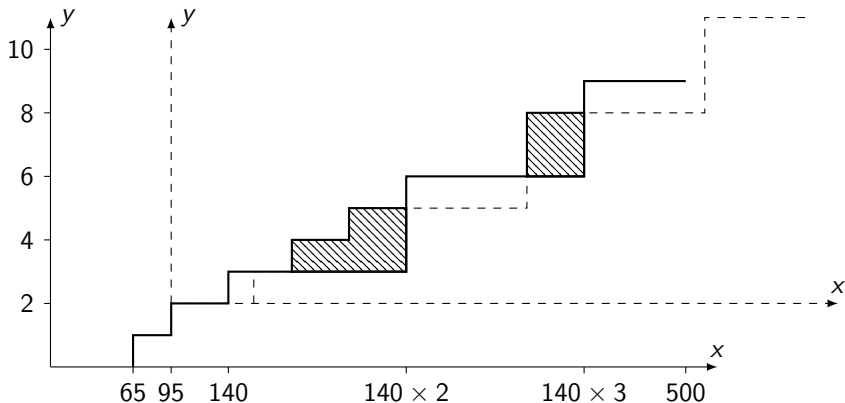
How the knapsack problems are solved?

Scale of Indices - Graphical DP for the Knapsack Problem



Consider the last subproblem. Make the indices integer by multiplying them by 10, so $\pi'_1 = 3, \pi'_2 = 2, \pi'_3 = 1$. Plot (two copies on semi-transparent paper) a graphic depicting feasible solution values for each knapsack capacity. Only the values corresponding to single-item solutions need to be exact

Scale of Indices - Graphical DP for the Knapsack Problem



Then shift one transparent paper to every break point. In this case the shift is to the break point (95,2). The shaded areas correspond to improving solutions!

Scale of Indices - Graphical DP for the Knapsack Problem

2. Если от начала любой ступени графика отложить длину по оси OX любую заготовку, то график должен быть отнесен к той же ступени, чем на индекс этой заготовки. Наоборот, если эти два условия соблюдены, шкала индексов составлена правильно.

Как же строить шкалу индексов? Конечно, можно перебирать все возможные комбинации заготовок и отмечать наиболее короткие из них, дающие уже следующее значение суммы индексов. Такие комбинации, как правило, состоят преимущественно из заготовок, для которых отношение длины к индексу наименьшее. (В примере 6 — заготовка 1400 мм.) Однако можно указать более простые графические приемы проверки и построения шкалы индексов.

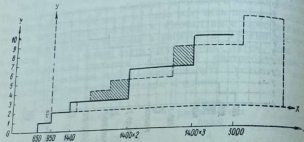


Рис. 9.

Пример 1. На графике откладываются длины и индексы для каждой заготовки отдельно. (Кроме того, полезно отметить комбинации из нескольких раз повторенных одинаковых заготовок, для которых отношение длины к индексу минимально.)

Исходя только из рассмотренных комбинаций, строится приближенная шкала индексов, и весь график копируется на вложенную кальку. Затем калька сдвигается параллельно самой себе так, чтобы начало координат (на кальке) совпало с началом выступающих углов графика на основном чертеже. На рис. 9 сплошными линиями изображено первое приближение графика, полученное с помощью лишь основных заготовок и различных кратностей заготовки в 1400 мм. Пунктиром показано смещенное положение того же графика, нанесенного на кальку. Если бы шкала уже была правильной, то весь график на каком-либо месте графика на кальке выступал бы выше основного графика (заштрихованные места на рис. 9), то такой выступ дополнялся в основной чертеж. Калька переносится обратно,

и этот же выступ дополняется и на ней. После этого операция сдвига повторяется.

Когда при перемещении до всем выступам основного графика никаких дополнений вносить не придется, шкала будет готова и проверенной. Это утверждение не требует специального доказательства, поскольку указанное построение представляет собою не что иное, как систематизированный и упрощенный до ряда однотипных графических действий просмотр всех возможных комбинаций.

Пример 2. Другой прием графического построения шкалы индексов состоит в том, что сначала уточняется начало шкалы (на участке небольшой длины материала), а затем с помощью уже известного участка шкалы последовательно уточняется шкала для все больших длин, вплоть до полной длины материала.

Допустим, что нам уже известно начало шкалы до некоторой длины. На рис. 10 изображена часть шкалы индексов (до длины 1500 мм), составлен-

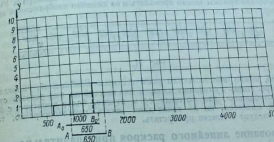
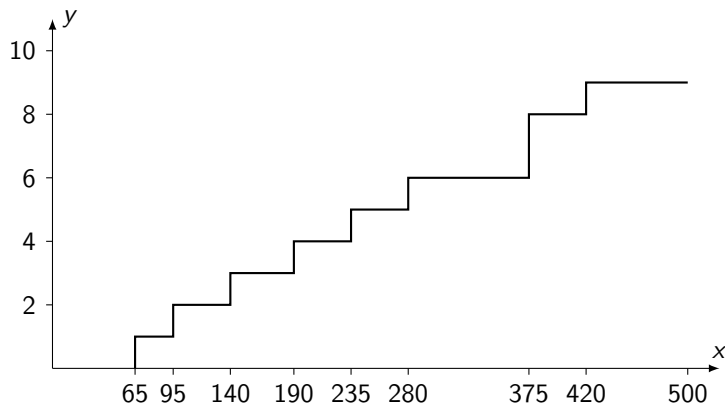


Рис. 10.

ная в условиях примера 6. Чтобы определить дальнейший ход графика на ближайшем участке, поступим следующим образом. От конца участка, на ближайшем участке, отложим назад длину одной из заготовок (заготовка, для которой график известен, отложим назад длину одной из заготовок в 650 мм в положении A_1B_1 на рис. 10), а затем сдвинем эту заготовку вправо до тех пор, пока ее левый конец поровняется с одним из пунктов графика (положение AB). Правый конец B указывает длину той комбинации с участием выбранной заготовки (в данном случае — 650 мм), которая наиболее близка к длине, до которой был раньше построен график, и которая может дать некоторое увеличение суммы индексов. Сумму индексов такой комбинации легко подсчитать, прибавляя к индексу, указанному в графике против точки A (в данном случае 2), индекс отложенной заготовки (в данном случае 1).

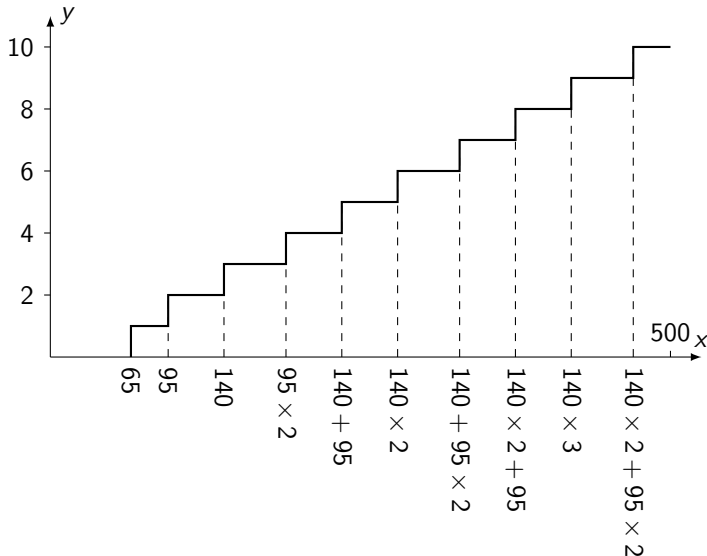
Аналогично откладываются и сдвигаются другие заготовки. Получаем другие положения точки B и другие суммы индексов. До ближайшей из точек B график будет идти на прямом уровне, а в этой точке поднимется до значения соответствующей суммы (в данном случае ближайшей будет точка 1600; значения соответствующей суммы в данном случае несколько пропущено, повторим не произойдет). После того как график продолжения получим график прием построения (в данном случае при втором продолжении получим график до 1800, до произойдет подъем от индекса 3 к индексу 4), и т. д. Продолжая такое построение, можно последовательно получить всю шкалу.

Scale of Indices - Graphical DP for the Knapsack Problem



Mark the resulting improved Scale of Indices on one of the papers. By repeating the procedure a second time, again at break point (95,2), a second improved Scale of Indices is found. As it can not be improved by a third application of the procedure, it is optimal

Final Optimal Scale of Indices



As the optimal knapsack solution value for $W = 500$ is 10 (1 after dividing it by 10), there is no improving pattern

Scale of Indices - Graphical DP for the Knapsack Problem

план полос: таким раскрой соответствует точки, наиболее близкие к ограничивающим прямым линиям. На рис. 7 отмечены четыре такие точки. Этим точкам соответствует раскрой:

$$\begin{aligned} 910 \times 3 + 732 \times 3 &= 4926 & (1) \\ 1086 \times 910 + 732 \times 4 &= 4324 & (2) \\ 1086 \times 2 + 910 \times 3 &= 4902 & (3) \\ 1086 \times 3 + 910 + 732 &= 4807 & (4) \end{aligned}$$

Знание отдельных наиболее благоприятных раскроев дает нам возможность подобрать сразу составить весь экономичный план и затем, в случае надобности, перейти к методу последовательных улучшений.

Так, в последнем примере без труда удается составить план, используя лишь выделенные благоприятных раскроев.

Попробуем обойтись тремя из четырех благоприятных раскроев. Поскольку в первых трех раскроях заготовок в 910 мм больше, чем заготовок в 1086 мм, а их надо получить поровну, обязательно использовать раскрой 4. Необходимое преобладание только использовать раскрой 4. Необходимое преобладание только использовать раскрой 4. Третий раскрой заготовок в 732 мм есть лишь произвольно. Затем, как это в данном случае можно взять произвольно. Затем, как это уже многократно делалось, подбираем употребительность выбранных раскроев, чтобы удовлетворить условию комплектности. В результате приходим к плану:

Раскрой	Число раскраиваемых полос
$910 \times 3 + 732 \times 3$	4
$1086 \times 910 + 732 \times 4$	9
$1086 \times 3 + 910 + 732$	6

По этому плану расходуются 19 полос на 27 комплектов. Отметим, что контроль плана приводит к подтверждению того, что этот план — наиболее экономный.

§ 3. Некоторые замечания о свойствах индексов.

Планирование линейного раскроя при значительном преобладании нескольких заготовок

Шкала индексов. После того как индексы заготовок выбраны, каждой комбинации заготовок соответствует определенная сумма индексов. Для всякого куска материала среди уместящихся в нем различных комбинаций заготовок найдутся такие, которые дают наибольшую сумму индексов. Если сопоставлять эту сумму длине куска материала, то каждой длине от 0 до полной длины поступающих полос будет поставлено в соответствие определенное число — наибольшая сумма индексов заготовок, получающихся из этой длины.

Изобразим эту зависимость в виде графика. Вдоль оси OX откладываем длину, а вдоль оси OY — соответствующую ей максимальную сумму индексов. Такой график мы называем **шкалой индексов**. Пример такой шкалы, составленной при окончательном значении индексов примера 6 (план № 3, стр. 42) приведен на рис. 8.

Такого рода график всегда будет иметь вид возрастающей ступенчатой линии. Каждый переход к следующей ступени соответствует по своему положению наименьшей длине комбинации, дающей следующую несколько большую сумму индексов.

Максимальная сумма индексов заготовок, получающихся из целой полосы, соответствует наиболее высокой точке в конце целой полосы, соответствует наиболее высокой точке в конце целой полосы, если все употребленные в плане рас-

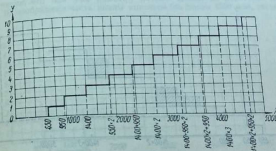


Рис. 8.

крои давали одинаковую сумму индексов S , то подтвердить отсутствие раскроев с суммой индексов больше, чем в приведенных раскроях, можно, построив шкалу индексов: график, в самом конце его, не должен подняться выше, чем на S . Необходимо, однако, проверить, правильно ли составлена такая шкала, т. е. все ли комбинации заготовок были учтены при ее составлении. Для контроля может служить следующий (необходимый и достаточный) признак:

Если шкала составлена с учетом всех возможных комбинаций, то будут соблюдены два условия:

1. Длине каждой заготовки соответствует на графике ее индекс.¹

¹ Длине некоторых заготовок могла бы, вообще говоря, соответствовать на графике величина больше, чем индекс заготовки. Однако, если бы это было место, то такая заготовка не фигурировала бы ни в одном оптимальном раскрое. Этого не может быть при окончательных значениях индексов и при выбираемых приближенно индексах, обладающих свойствами 1 и 2, § 7, гл. 1.

Scale of Indices - Graphical DP for the Knapsack Problem

In the pre-computer era, it was very common for engineers to use mechanical analog devices (like sliding rules) for speeding-up calculations.

Due to its “parallel nature”, several possible improvements are tested at once, the Scale of Indices method converges fast.

Yet, like most mechanical analog methods, the Scale of Indices suffers from low numerical precision. The DP knapsack algorithm with explicit stage-by-stage numerical calculations proposed in [Bellman, 1955] can have arbitrary precision.

The CG methods in [Kantorovich and Zalgaller, 1951] were already in use?

The book is so mature and concerned with practical issues that it is likely that the proposed methods were already tested in real situations.

- However, to our knowledge, no records exist that detail their concrete implementation.
- What can be found, though, are mentions of early applications of LP-based approaches for solving CSPs.

Some excerpts from Gardner [1990]

"Most of the work that Kantorovich did for the Soviet military remains classified to this day. We do know that Kantorovich applied his technique to the problem of cutting metal for tanks, and to the problem of laying mine fields."

"As Katsenelinboigen (1978-79) tells, the cutting of sheet metal at the Leningrad E. I. Egorov Railroad Car Building Plant produced tremendous quantities of scrap. After introducing Kantorovich's solution technique, officials were able to reduce the amount of scrap by 50 percent. This had the unfortunate side effect of greatly reducing the amount of scrap metal available to steel plants in the region, and Kantorovich was ordered to appear at Leningrad party headquarters for allegedly sabotaging the economy. He was rescued by the military, which needed him for its atomic program."

The CG methods in [Kantorovich and Zalgaller, 1951] were used after 1951?

Of course! Thousands of plants in the USSR needed to solve CSPs. The book only uses simple math. Kantorovich was a celebrity, the winner of the highest Soviet scientific honors: Stalin Prize (1949) and Lenin Prize (1964) (actually the same prize twice, the name was changed in 1956). There was enough demand to justify a second edition of the book

Yet, LP-based methods (in general, not only for the CSP) were much less used in the Soviet Union than Kantorovich wished for.

- After 1956 the ideological objections decreased and computers became more available
- However, LP still faced strong resistance from a bureaucratic management class averse to innovation

Final Remarks

[Kantorovich and Zalgaller, 1951] deserves to be called the “0-th work” on CG:

- It presents a complete CG-based method for the CSP (for its 1D variant, where an exact pricing algorithm is proposed), anticipating [Gilmore and Gomory, 1961, 1963].
- Yet, it had a negligible impact outside the Soviet block, being virtually unknown in the West until today. It had no influence on the mainstream development of CG. Why? Contacts limited by Cold War? Language barrier? Perhaps
 - But even the contents of [Kantorovich, 1939], published in English in 1960, are not correctly mentioned!

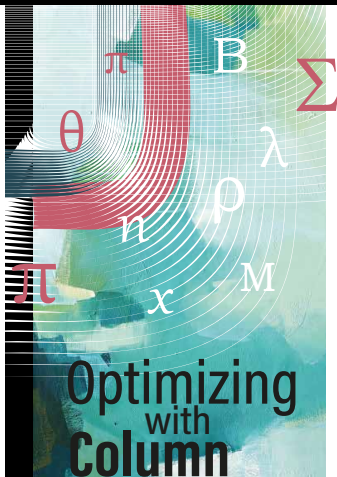
Final Remarks

[Kantorovich and Zalgaller, 1951] deserves to be called the “0-th work” on CG:

- It presents a complete CG-based method for the CSP (for its 1D variant, where an exact pricing algorithm is proposed), anticipating [Gilmore and Gomory, 1961, 1963].
- Yet, it had a negligible impact outside the Soviet block, being virtually unknown in the West until today. It had no influence on the mainstream development of CG. Why? Contacts limited by Cold War? Language barrier? Perhaps
 - But even the contents of [Kantorovich, 1939], published in English in 1960, are not correctly mentioned!

We believe that it is fair to correct that mistake and start referring to the Kantorovich-Gilmore-Gomory CSP formulation

This story and many other narratives about Column
Generation are coming!



Optimizing with **Column Generation**

Eduardo Uchoa | Ruslan Sadykov | Artur Pessoa

New Book! “Optimizing with Column Generation: advanced branch-cut-and-price algorithms”





Main authors: Eduardo Uchoa, Ruslan Sadykov and Artur Pessoa

Contributing author: François Vanderbeck (chapter on software for Column Generation)



Cover design: Leonardo Viana (no AI-generated image!)

- Work started in April 2022
- 60% of its estimated content, 500-pages not counting references and indices, have already been written
- Scheduled to be finished by the end of the year
- Extensive historical research, including the “forgotten ones”
- Beginner-friendly, starts from the basics
- Yet, it has in-depth coverage of the recent advanced BCP techniques that proved to be the most effective in practice

References I

-  Boldyrev, Ivan and Till Düppe (2020). “Programming the USSR: Leonid V. Kantorovich in context”. In: *The British Journal for the History of Science* 53.2, pp. 255–278.
-  Bollard, Alan (2020). “Economists at War: How a Handful of Economists Helped Win and Lose the World Wars”. In: Oxford University Press. Chap. The Calculating Iceman: Leonid Kantorovich in the USSR, 1941-42.
-  Gardner, Roy (1990). “LV Kantorovich: the price implications of optimal planning”. In: *Journal of Economic Literature* 28.2, pp. 638–648.
-  Polyak, Boris T (2002). “History of mathematical programming in the USSR: analyzing the phenomenon”. In: *Mathematical Programming* 91.3, pp. 401–416.

References II

-  Van de Panne, Cornelis and Farhood Rahnema (1985). “The first algorithm for linear programming: An analysis of Kantorovich’s method”. In: *Economics of Planning* 19.2, pp. 76–91.
-  Vershik, Anatoly (2007). “LV Kantorovich and linear programming”. In: *arXiv preprint arXiv:0707.0491*.

Thank you!