

# MTH8415 – Formulaire

version du 2019-02-21

## Optimisation linéaire

— Modèle sous **forme standard** :

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

— Modèle de la **phase 1** du simplexe :

$$\max_{x_0, x} -x_0$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} Ax - x_0 \mathbf{1} \leq b \\ x_0, x \geq 0 \end{cases}$$

— **Primal sous forme standard** :

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \leq b_2$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

**Dual :**

$$\min_{\pi \in \mathbb{R}^m} w = b_1 \pi_1 + b_2 \pi_2 + \dots + b_m \pi_m$$

$$a_{11} \pi_1 + a_{21} \pi_2 + \dots + a_{m1} \pi_m \geq c_1$$

$$a_{12} \pi_1 + a_{22} \pi_2 + \dots + a_{m2} \pi_m \geq c_2$$

$$a_{1n} \pi_1 + a_{2n} \pi_2 + \dots + a_{mn} \pi_m \geq c_n$$

$$\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m \geq 0$$

— Aide mémoire **dualité** :

Primal	min	max	Dual
Contraintes	$\geq b_i$	$\geq 0$	Variables
	$\leq b_i$	$\leq 0$	
	$= b_i$	libre	
Variables	$\geq 0$	$\leq c_j$	Contraintes
	$\leq 0$	$\geq c_j$	
	libre	$= c_j$	

— Relations possibles entre le primal et le dual :

		Dual		
		Sol. optimale	Non réalisable	Non borné
Primal	Sol. optimale	Possible	Impossible	Impossible
	Non réalisable	Impossible	Possible	Possible
	Non borné	Impossible	Possible	Impossible

## Optimisation non linéaire

- **Direction de Newton** :  $-(\nabla^2 f(x^k))^{-1} \nabla f(x^k)$
- **Cône tangent** :  $T_\Omega(x) = \left\{ d \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} d^\top \nabla c_i(x) = 0 \quad i \in \mathcal{E} \\ d^\top \nabla c_i(x) \geq 0 \quad i \in \mathcal{A}(x) \end{array} \right\}$
- **Cône normal** :  $N_\Omega(x) = \left\{ \sum_{i \in \mathcal{E}} \lambda_i \nabla c_i(x) - \sum_{i \in \mathcal{A}(x)} \lambda_i \nabla c_i(x) \mid \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R} \quad i \in \mathcal{E} \\ \lambda_i \geq 0 \quad i \in \mathcal{A}(x) \end{array} \right\}$
- **CN1** :  $x^*$  minimum local de  $f$  dans  $\Omega \Rightarrow -\nabla f(x^*) \in N_\Omega(x^*)$
- **KKT** :  
 $x^*$  minimum local de  $f$  dans  $\Omega \Rightarrow$  il existe  $\lambda \in \mathbb{R}^{m+p}$  tel que
 
$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) - \sum_{i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}} \lambda_i \nabla c_i(x^*) &= 0 \\ \lambda_i c_i(x^*) &= 0 \quad i \in \mathcal{I} \\ c_i(x^*) &= 0 \quad i \in \mathcal{E} \\ c_i(x^*) &\geq 0 \quad i \in \mathcal{I} \\ \lambda_i &\geq 0 \quad i \in \mathcal{I} \end{aligned}$$
- **Lagrangien** :  $L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}} \lambda_i c_i(x)$
- **Lagrangien augmenté** ( $\mathcal{I} = \emptyset$ ) :  $L_a(x, \lambda, \mu) = L(x, \lambda) + \frac{\mu}{2} \sum_{i \in \mathcal{E}} c_i^2(x)$