

Plan

1. Optimisation linéaire avec le solveur de Excel
2. Autres solveurs
3. Application : Approximations linéaires
4. Application : Jeux matriciels

Références

Variables d'optimisation

- ▶ Une cellule par variable
- ▶ Les placer sur une même ligne dans des colonnes contiguës
- ▶ Ajouter une particularité (couleur **bleue**) pour identification rapide
- ▶ Placer le nom des variables dans les cellules juste au-dessus et à gauche (lecture facile des sorties)
- ▶ Optionnel : Fournir une valeur initiale aux variables

Fonction objectif

- ▶ Placer les coefficients de manière similaire aux variables
- ▶ Calculer avec la fonction Excel SOMMEPROD (SUMPRODUCT)
- ▶ Placer le nom juste au-dessus ou nommer la cellule
- ▶ Ajouter une particularité (couleur **jaune**) pour identification rapide

Contraintes

- ▶ Une contrainte par ligne
- ▶ Un seul nombre à droite dans une cellule distincte
- ▶ Toutes les variables à gauche
- ▶ Placer les coefficients dans colonnes correspondant aux variables
- ▶ Faire le calcul (avec SOMMEPROD) du membre de gauche et placer le résultat dans une cellule
- ▶ Placer le nom de la contrainte à gauche
- ▶ Ajouter particularité (couleur verte) pour identification rapide

Exécution du solveur

- ▶ Lancer l'interface du solveur depuis le menu Outils ou Données
- ▶ Cellule cible à définir : fonction objectif (min/max)
- ▶ Cellules variables : variables de décision
- ▶ Contraintes : contraintes
- ▶ Via les Options du solveur :
 - ▶ Supposé non-négatif : contraintes de non négativité
 - ▶ Indiquer Modèle supposé linéaire
 - ▶ Cocher Échelle automatique
- ▶ Cliquer sur Résoudre, puis Réponses (Sensibilité) et sur Ok
- ▶ Après : Bien lire le message pour savoir si ça a marché

Exemple 1 : Oak Products

- ▶ [Weatherford, 1997]
- ▶ La compagnie *Oak Products* fabrique 6 types de chaises à partir de 11 composantes
- ▶ Chaque semaine on regarde l'inventaire des composantes et on établit le plan de production
- ▶ Chaque type de chaise induit un profit unitaire
- ▶ Combien doit on produire de chaises de chaque type ?

Oak Products : Données

Style	Captain	Mate	Amer. H	Amer. L.	Span. K.	Span. Q.	
Profit/chaise	36.00 \$	40.00 \$	45.00 \$	38.00 \$	35.00 \$	25.00 \$	
	Composantes de chaises						Nb.
Long Dowels	8	0	12	0	8	4	1280
Short Dowels	4	12	0	12	4	8	1900
Legs	4	4	4	4	4	4	1090
Heavy Seat	1	0	0	0	1	1	190
Light Seat	0	1	1	1	0	0	170
Heavy rungs	6	0	4	0	5	0	1000
Light rungs	0	4	0	5	0	6	1000
Capt. Rails	1	0	0	0	0	0	110
Mate Rails	0	1	0	0	0	0	72
Amer. Rails	0	0	1	1	0	0	93
Span. Rails	0	0	0	0	1	1	85

Oak Products : Variables et objectif

- ▶ Une variable de décision par type de chaise :

$x = (C, M, H, L, K, Q)$, avec :

- ▶ C : nombre de chaises *Captain* produites
- ▶ M (*Mate*)
- ▶ H (*American High*)
- ▶ L (*American Low*)
- ▶ K (*Spanish King*)
- ▶ Q (*Spanish Queen*)

- ▶ Profit : Fonction objectif à maximiser :

$$f(x) = 36C + 40M + 45H + 38L + 35K + 25Q$$

Oak Products : Contraintes

- ▶ Une condition contrainte d'inventaire à respecter pour chacune des composantes (contraintes \leq) :
 - ▶ Nombre de grandes chevilles :

$$c_1(x) = 8C + 12H + 8K + 4Q \leq 1280$$
 - ▶ Nombre de petites chevilles :

$$c_2(x) = 4C + 12M + 12L + 4K + 8Q \leq 1900$$
 - ...
 - ▶ Nombre de dossiers type Spanish : $c_{11}(x) = K + Q \leq 85$

- ▶ Finalement, il y a des impératifs de production à respecter : il faut produire des nombres positifs de chaises (contraintes \geq) :

$$C \geq 0, M \geq 0, H \geq 0, \dots, Q \geq 0$$

Oak Products : Modèle

$$\max_{C,M,H,L,K,Q} 36C + 40M + 45H + 38L + 35K + 25Q$$

$$\text{s.c.} \quad \left\{ \begin{array}{ll} 8C + 12H + 8K + 4Q & \leq 1280 \\ 4C + 12M + 12L + 4K + 8Q & \leq 1900 \\ 4C + 4M + 4H + 4L + 4K + 4Q & \leq 1090 \\ C + K + Q & \leq 190 \\ M + H + L & \leq 170 \\ \dots & \\ K + Q & \leq 85 \\ C, M, H, L, K, Q & \geq 0 \end{array} \right.$$

Oak Products : Résolution

Voir fichier Ex1-Oak Products.xlsx

Exemple 2 : Blue Ridge Hot Tubs (BRHT)

- ▶ [Ragsdale, 2010]
- ▶ Modèle :

Max. profit	$350X_1 + 300X_2$	
Pompes	$X_1 + X_2$	≤ 200
Main d'œuvre	$9X_1 + 6X_2$	≤ 1566
Tuyaux	$12X_1 + 16X_2$	≤ 2880
non-négativité	X_1, X_2	≥ 0

BRHT : Rapport de sensibilité

Microsoft Excel 12.0 Rapport de la sensibilité
 Feuille: [2657-3.1-BlueRidgeHotTub-sol.xls]Modèle
 Date du rapport: 2009-08-19 13:35:47

Cellules variables

Cellule	Nom	Finale Valeur	Réduit Coût	Objectif Coefficient	Admissible Augmentation	Admissible Réduction
\$B\$6	Production Aqua Spa	122	0	350	100	50
\$C\$6	Production Hydro Lux	78	0	300	50	66,6666667

Contraintes

Cellule	Nom	Finale Valeur	Ombre Coût	Contrainte à droite	Admissible Augmentation	Admissible Réduction
\$D\$10	Pompe	200	200	200	7	26
\$D\$11	Main d'œuvre	1566	16,6666667	1566	234	126
\$D\$12	Tuyau	2712	0	2880	1E+30	168

BRHT : Sensibilité aux coefficients de l'objectif

- ▶ Les valeurs appelées “Augmentation admissible” et “Réduction admissible” pour les cellules variables indiquent la taille maximale des variations du coefficient de l'objectif qui laissent la solution optimale inchangée (même point extrême) en supposant que tous les autres coefficients restent inchangés
- ▶ Un zéro pour “Augmentation admissible” ou “Réduction admissible” indique qu'il existe plus d'une solution optimale
- ▶ L'intervalle admissible de changement décrit dans le rapport de sensibilité n'est valable que si tous les autres coefficients restent fixes (i.e. seulement un est changé)
- ▶ Si le changement sort de l'intervalle admissible, il faut résoudre le problème à nouveau pour en connaître l'impact sur la solution optimale (i.e. les nouvelles valeurs optimales des variables et de l'objectif)

BRHT : Interprétation des coûts réduits des variables

- ▶ Pour une variable qui n'est pas à sa borne supérieure ou inférieure, le coût réduit est de zéro
- ▶ Pour une variable qui est à sa borne sup. ou inf., le coût réduit indique l'impact sur la valeur optimale de l'objectif d'une augmentation d'une unité de cette variable
- ▶ Une variable dont la valeur optimale est à son minimum a un coût réduit relié au changement minimum du coefficient de l'objectif qui rend une augmentation de cette variable profitable

BRHT : Sensibilité aux membres de droite des contraintes

Microsoft Excel 12.0 Rapport de la sensibilité
 Feuille: [2657-3.1-BlueRidgeHotTub-sol.xls]Modèle
 Date du rapport: 2009-08-19 13:35:47

Cellules variables

Cellule	Nom	Finale Valeur	Réduit Coût	Objectif Coefficient	Admissible Augmentation	Admissible Réduction
\$B\$6	Production Aqua Spa	122	0	350	100	50
\$C\$6	Production Hydro Lux	78	0	300	50	66,6666667

Contraintes

Cellule	Nom	Finale Valeur	Ombre Coût	Contrainte à droite	Admissible Augmentation	Admissible Réduction
\$D\$10	Pompe	200	200	200	7	26
\$D\$11	Main d'œuvre	1566	16,6666667	1566	234	126
\$D\$12	Tuyau	2712	0	2880	1E+30	168

BRHT : Sensibilité aux mdd des contraintes

- ▶ Changer le membre de droite d'une contrainte :
 - ▶ Peut changer la valeur optimale de l'objectif
 - ▶ Peut changer la solution optimale (un nouveau point extrême)
- ▶ Le rapport de sensibilité associe un **coût ombre** (*shadow price*) à chacune des contraintes. Celui-ci indique de combien l'objectif augmentera par unité d'augmentation du membre de droite, en supposant que tous les autres paramètres restent constants
- ▶ Le coût ombre n'est valable que si le mdd reste dans l'intervalle admissible, défini par les valeurs de "Augmentation admissible" et de "Réduction admissible"
- ▶ Les coûts ombre correspondent aux opposés des coûts réduits des variables d'écart et aux solutions duales

BRHT : Sensibilité aux mdd des contraintes

- ▶ Si la variation du mdd est dans cet intervalle, la nouvelle valeur optimale de l'objectif se calcule comme suit :
Variation de l'obj. = variation du mdd \times coût ombre
- ▶ Le coût ombre des contraintes inactives est toujours zéro :
Changer la valeur du mdd d'une contrainte inactive n'affecte pas la solution optimale
- ▶ Ces règles ne s'appliquent que si seulement un paramètre (mdd) est modifié
- ▶ Le coût ombre indique seulement la variation de la valeur optimale de l'objectif. Si la contrainte est active, changer son mdd affecte l'ensemble des solution admissibles et mène à une nouvelle solution optimale. Pour trouver la nouvelle solution optimale, nous devons résoudre à nouveau le problème

BRHT : Autre usage des coûts ombre

- ▶ Supposons qu'un nouveau bain (le Typhoon-Lagoon) peut être produit par BRHT. Son profit unitaire serait de 320\$ et requiert : 1 pompe (coût ombre = 200\$), 8 heures de main d'œuvre (coût ombre = 16.67\$), 13 pieds de tuyaux (coût ombre = 0\$)
- ▶ Est-il profitable de produire ce bain ?
- ▶ $320 - 200 \times 1 - 16.67 \times 8 - 0 \times 13 = -13.33\$$: Non
- ▶ Un produit dont le profit marginal est au dessous du coût marginal de sa production (mesuré avec les coûts ombre des ressources) ne peut être produit dans une solution optimale (à moins d'ajouter une contrainte de production minimale)

BRHT : Solution dégénérée

- ▶ La solution d'un POL est appelée dégénérée si une des variables de base est à sa borne supérieure ou à sa borne inférieure
- ▶ On détecte une solution dégénérée si l'augmentation ou la diminution admissible pour le mdd d'une contrainte est à zéro
- ▶ Dans ce cas, le rapport de sensibilité est difficilement interprétable

Exemple 3 : Eastern Steel

- ▶ ES achète du minerai provenant de 4 mines et mélange ces minerais pour obtenir de l'acier. La qualité de l'acier se mesure en fonction de la teneur du mélange, selon 3 types d'élément A, B et C. Par tonne d'acier, il faut au moins 5 kilos de A, 100 de B, 30 de C. A, B et C sont en quantités différentes dans le minerai des 4 mines exploitées et à des prix différents :

	Mine 1	Mine 2	Mine 3	Mine 4
A (kg/tonne)	10	3	8	2
B (kg/tonne)	90	150	75	175
C (kg/tonne)	45	25	20	37
\$/tonne	800	400	600	500

- ▶ Il faut déterminer le mélange à coût minimal

ES : Modèle

- ▶ Variables : $M1, M2, M3, M4$: Quantité de minerai des mines 1 à 4 dans une tonne d'acier
- ▶ Modèle :

$$\min 800M1 + 400M2 + 600M3 + 500M4$$

$$\text{s.c. } \begin{cases} 10M1 + 3M2 + 8M3 + 2M4 & \geq 5 & (1) \\ 90M1 + 150M2 + 75M3 + 175M4 & \geq 100 & (2) \\ 45M1 + 25M2 + 20M3 + 37M4 & \geq 30 & (3) \\ M1 + M2 + M3 + M4 & = 1 & (4) \\ M1, M2, M3, M4 & \geq 0 & \end{cases}$$

ES : Rapport de sensibilité

Cellules variables

Cellule	Nom	Finale Valeur	Réduit Coût	Objectif Coefficient	Admissible Augmentation	Admissible Réduction
\$B\$5	Fraction M1	0,259	0,000	800	223,6363636	120
\$C\$5	Fraction M2	0,704	0,000	400	66,84782609	300
\$D\$5	Fraction M3	0,037	0,000	600	85,71428571	118,2692308
\$E\$5	Fraction M4	0,000	91,111	500	1E+30	91,11111111

Contraintes

Cellule	Nom	Finale Valeur	Ombre Coût	Contrainte à droite	Admissible Augmentation	Admissible Réduction
\$G\$7	Niveau A MdG	5,00	44,44	5	2,375	0,25
\$G\$8	Niveau B MdG	131,67	0,00	100	31,66666667	1E+30
\$G\$9	Niveau C MdG	30,00	4,44	30	0,714285714	7
\$G\$10	Mélange MdG	1,00	155,56	1	0,25	0,043478261

ES : Questions

- ▶ De combien au maximum la mine 2 peut-elle augmenter son prix sans voir ses ventes auprès de ES baisser ?

Réponse : 66.85\$

- ▶ De combien la mine 4 doit-elle baisser son prix pour réussir à vendre son minerai à ES ?

Réponse : 91.11\$

- ▶ Sans renégocier le prix des minerais auprès des mines, comment ES peut-elle baisser son coût de minerai à 500\$ par tonne ?

Possibilité 1 : Relaxer la contrainte (1) de 5 à 4.75
($511.11 - 0.25 \times 44.44 = 500$)

Possibilité 2 : Relaxer la contrainte (3) de 30 à 27.5
($511.11 - 2.5 \times 4.444 = 500$)

1. Optimisation linéaire avec le solveur de Excel
 - 2. Autres solveurs**
 3. Application : Approximations linéaires
 4. Application : Jeux matriciels
- Références

Optimisation linéaire avec Matlab

- Pour résoudre $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = c^\top x$

$$\text{s.c.} \begin{cases} Ax \leq b \\ Dx = e \\ \ell \leq x \leq u \end{cases}$$

- Exécuter la commande :

$$[x \ f \ \text{flag} \ \text{output} \ \text{lambda}] = \text{linprog}(c, A, b, D, e, l, u)$$

- `lambda.ineqlin` et `lambda.eqlin` permettent d'accéder aux variables duales

CPLEX

- ▶ IBM CPLEX : Logiciel commercial
- ▶ Utilisation gratuite pour le monde académique
- ▶ Deux façons de l'utiliser : Via la ligne de commande ou en mode librairie

Autres solveurs

- ▶ Gurobi, Mosek

- ▶ AMPL / GAMS : Avec langage de modélisation

- ▶ GLPK, CLP (gratuits)

- ▶ Et beaucoup d'autres. Voir [page Wikipedia de l'optimisation linéaire](#)

Exemple

On veut trouver une approximation pour

$$\begin{array}{rclcl}
 x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 60 \\
 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 100 \\
 x_1 & +x_2 & & = & 31 \\
 & x_2 & +x_3 & = & 49
 \end{array}$$

ou encore $Ax = b$ avec $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $b = (60, 100, 31, 49)$

Résidus

- On définit le vecteur de **résidus** associé à une solution $x \in \mathbb{R}^n$ par

$$r = (r_1, r_2, \dots, r_m)$$

avec

$$r_i = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \text{ pour tout } i = 1, 2, \dots, m$$

- La meilleure approximation linéaire est celle qui minimise la **norme** des résidus, mais il y a plusieurs normes possibles

Normes des résidus

Norme p :

$$\|r\|_p = \|b - Ax\|_p = (|r_1|^p + |r_2|^p + \dots + |r_m|^p)^{1/p}$$

Ce qui donne :

- Pour $p = 1$ (norme ℓ_1) :

$$\|r\|_1 = |r_1| + |r_2| + \dots + |r_m|$$

- Pour $p = 2$ (norme euclidienne) :

$$\|r\|_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_m^2}$$

- Pour $p = \infty$ (norme ℓ_{inf}) :

$$\|r\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|r\|_p = \max_{i \in \{1, 2, \dots, m\}} |r_i|$$

Comparaison de différentes solutions

	x_1	x_2	x_3	r_1	r_2	r_3	r_4	$\ r\ _1$	$\ r\ _2$	$\ r\ _\infty$
	10	20	30	0	0	1	-1	2	1.4142	1
	9	22	29	0	0	0	-2	2	2	2
	11	18	31	0	0	2	0	2	2	2
	11	20	29	0	-2	0	0	2	2	2
$x_{\ell_1}^*$	10	21	28	1	0	0	0	1	1	1
$x_{\ell_2}^*$	10.1429	20.5714	28.7143	0.5714	-0.2857	0.2857	-0.2857	1.4286	0.7559	0.5714
$x_{\ell_\infty}^*$	10.2	20.4	29	0.4	-0.4	0.4	-0.4	1.6	0.8	0.4

Solution pour $p = 2$

- ▶ Revient à résoudre le problème d'optimisation non linéaire sans contrainte

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right)^2$$

- ▶ Il s'agit de la **régression au sens des moindres carrés**, pour laquelle on a une solution analytique donnée par

$$x^* = (A^T A)^{-1} A^T b$$

(preuve dans cours d'algèbre)

- ▶ Si $r(A) = n$, $(A^T A)^{-1}$ et x^* existent
- ▶ Pour l'exemple, on obtient

$$x^* = x_{\ell_2}^* = (10.1429, 20.5714, 28.7143)$$

Solution pour $p = 1$: Modèle linéaire

Avec $A^\top = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m]$ (i.e. a_i : i ème ligne de A), on veut résoudre

$$\begin{aligned}
 & \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|b - Ax\|_1 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m |b_i - a_i^\top x| \\
 = & \min_{x \in \mathbb{R}^n, \tau \in \mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^m \tau_i \quad \text{s.c.} \quad \tau_i \geq |b_i - a_i^\top x|, \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 = & \min_{x \in \mathbb{R}^n, \tau \in \mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^m \tau_i \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} \tau_i \geq b_i - a_i^\top x & i = 1, 2, \dots, m \\ \tau_i \geq -b_i + a_i^\top x & i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \\
 = & \min_{x \in \mathbb{R}^n, \tau \in \mathbb{R}^m} \mathbf{1}^\top \tau \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} Ax + \tau \geq b \\ -Ax + \tau \geq -b \end{cases}
 \end{aligned}$$

(avec $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$)

Solution pour $p = 1$: Dual

- Primal ($n + m$ variables, $2m$ contraintes) :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n, \tau \in \mathbb{R}^m} \mathbf{1}^\top \tau$$

$$\text{s.c. } \begin{cases} Ax + \tau & \geq & b & (u) \\ -Ax + \tau & \geq & -b & (v) \end{cases}$$

- Dual ($2m$ variables, $m + n$ contraintes) :

$$\max_{u, v \in \mathbb{R}^m} b^\top u - b^\top v$$

$$\text{s.c. } \begin{cases} A^\top u - A^\top v & = & 0 & (x) \\ u + v & = & \mathbf{1} & (\tau) \\ u, v & \geq & 0 & \end{cases}$$

Solution pour $p = 1$: Dual simplifié

- ▶ À partir du dual :

$$\max_{u,v \in \mathbb{R}^m} b^\top u - b^\top v$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} A^\top u - A^\top v & = 0 \\ u + v & = \mathbf{1} \\ u, v & \geq 0 \end{cases}$$

- ▶ On pose $v = \mathbf{1} - u$ et le problème devient

$$-b^\top \mathbf{1} + 2 \max_{u \in \mathbb{R}^m} b^\top u$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} A^\top u = \frac{1}{2} A^\top \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \leq u \leq \mathbf{1} \end{cases}$$

(m variables, n contraintes)

Solution pour $p = 1$: Pour l'exemple

- Il faut résoudre

$$\begin{array}{ll} \max_{u_1, \dots, u_4} & 60u_1 + 100u_2 + 31u_3 + 49u_4 \\ \text{s.c.} & \left\{ \begin{array}{ll} u_1 + 3u_2 + u_3 & = 5/2 \\ u_1 + 2u_2 + u_3 + u_4 & = 5/2 \\ u_1 + u_2 + u_4 & = 3/2 \\ 0 \leq u_1, u_2, u_3, u_4 \leq 1 \end{array} \right. \end{array}$$

- La solution est $u^* = (1, 1/4, 3/4, 1/4)$ qui permet de retrouver

$$x^* = x_{\ell_1}^* = (10, 21, 28)$$

de valeur

$$\|r\|_1 = -b^T \mathbf{1} + 2b^T u^* = -240 + 241 = 1$$

Solution pour $p = \infty$: Modèle linéaire

On veut résoudre

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|b - Ax\|_{\infty} = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{i=1,2,\dots,m} |b_i - a_i^{\top} x|$$

$$= \min_{x \in \mathbb{R}^n, \tau \in \mathbb{R}} \tau \quad \text{s.c.} \quad \tau \geq |b_i - a_i^{\top} x|, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$= \min_{x \in \mathbb{R}^n, \tau \in \mathbb{R}} \tau \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} \tau \geq b_i - a_i^{\top} x & i = 1, 2, \dots, m \\ \tau \geq -b_i + a_i^{\top} x & i = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

$$= \min_{x \in \mathbb{R}^n, \tau \in \mathbb{R}} \tau \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} Ax + \tau \mathbf{1} \geq b \\ -Ax + \tau \mathbf{1} \geq -b \end{cases}$$

Solution pour $p = \infty$: Dual

- Primal ($n + 1$ variables, $2m$ contraintes) :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n, \tau \in \mathbb{R}} \tau \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} Ax + \tau \mathbf{1} & \geq b & (u) \\ -Ax + \tau \mathbf{1} & \geq -b & (v) \end{cases}$$

- Dual ($2m$ variables, $n + 1$ contraintes) :

$$\begin{aligned} & \max_{u, v \in \mathbb{R}^m} b^\top u - b^\top v \\ \text{s.c.} & \begin{cases} A^\top u - A^\top v & = 0 & (x) \\ \mathbf{1}^\top u + \mathbf{1}^\top v & = 1 & (\tau) \\ & u, v & \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Solution pour $p = \infty$: Pour l'exemple

- Il faut résoudre

$$\begin{aligned} & \max_{u_1, \dots, v_4} 60(u_1 - v_1) + 100(u_2 - v_2) + 31(u_3 - v_3) + 49(u_4 - v_4) \\ \text{s.c.} & \begin{cases} u_1 - v_1 + 3(u_2 - v_2) + u_3 - v_3 & = 0 \\ u_1 - v_1 + 2(u_2 - v_2) + u_3 - v_3 + u_4 - v_4 & = 0 \\ u_1 - v_1 + u_2 - v_2 + u_4 - v_4 & = 0 \\ u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 & = 1 \\ u_1, \dots, u_4, v_1, \dots, v_4 & \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- La solution est $(u^*, v^*) = (0.4, 0, 0.2, 0, 0, 0.2, 0, 0.2)$ qui permet de retrouver

$$x^* = x_{\ell_{\infty}}^* = (10.2, 20.4, 29)$$

de valeur

$$\|r\|_{\infty} = 0.4$$

1. Optimisation linéaire avec le solveur de Excel

2. Autres solveurs

3. Application : Approximations linéaires

4. Application : Jeux matriciels

Références

Introduction : Exemple

- ▶ Jeu du “roche, papier, ciseaux” pour deux joueurs
- ▶ Chaque joueur possède trois **stratégies pures** : $\{P, R, S\}$
- ▶ Matrice de profit A :

	P	R	S
P	0	1	-1
R	-1	0	1
S	1	-1	0

Stratégies

- ▶ Stratégie du joueur 1 : Tirer p au hasard dans $[0; 1]$ et :

Si $p \in [0; 1/2]$ \rightarrow jouer P

Si $p \in]1/2; 5/6]$ \rightarrow jouer R

Si $p \in]5/6; 1]$ \rightarrow jouer S

- ▶ Cette **stratégie mixte** est représentée par le **vecteur stochastique** $x = (1/2, 1/3, 1/6)$
- ▶ Tout vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $x \geq 0$ et $\mathbf{1}^\top x = 1$ définit une stratégie mixte
- ▶ Similairement, le joueur 2 joue une stratégie mixte $y \in \mathbb{R}^3$ avec $y \geq 0$ et $\mathbf{1}^\top y = 1$

Profit moyen

- ▶ Le profit moyen du joueur 1 est donné par :

$$\sum_{i,j \in \{P,R,S\}} A_{i,j} \times P(\text{joueur 1 joue } i) \times P(\text{joueur 2 joue } j) = x^\top Ay$$

- ▶ Pour l'exemple :

$$x^\top Ay = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}^\top A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{6}y_1 + \frac{1}{3}y_2 - \frac{1}{6}y_3$$

- ▶ Si le joueur 2 joue $y = (1/3, 1/3, 1/3)$, alors le profit moyen du joueur 1 est 0. Si $y = (1/2, 1/4, 1/4)$, le profit devient $-1/24$: Sur le long terme, le joueur 1 aura payé $1/24\$$ au joueur 2 par partie

Stratégie du joueur 2 en réponse au joueur 1

- ▶ Si le joueur 2 connaît la stratégie du joueur 1, il devrait choisir y avec le modèle d'OL suivant :

$$\min_{y \in \mathbb{R}^3} x^\top Ay = -\frac{1}{6}y_1 + \frac{1}{3}y_2 - \frac{1}{6}y_3$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

dont la solution est de la forme $y = (k, 0, 1 - k)$ avec $k \in [0; 1]$ pour un profit moyen de $-1/6$

(à montrer en exercice)

- ▶ Donc le joueur 1 devrait changer de stratégie

Stratégies d'équilibre

- ▶ (\bar{x}, \bar{y}) sont des **stratégies d'équilibre** si \bar{x} est la meilleure réponse à \bar{y} et si \bar{y} est la meilleure réponse à \bar{x}

- ▶ C'est à dire :

$$\bar{x} \in \arg \max_{x \in \mathcal{X}} x^\top A \bar{y} \quad \text{avec} \quad \mathcal{X} = \{x \geq 0 : \mathbf{1}^\top x = 1\}$$

et

$$\bar{y} \in \arg \min_{y \in \mathcal{Y}} \bar{x}^\top A y \quad \text{avec} \quad \mathcal{Y} = \{y \geq 0 : \mathbf{1}^\top y = 1\}$$

- ▶ On recherche de telles solutions

Chercher les stratégies d'équilibre

- ▶ Le joueur 1 doit anticiper la stratégie du joueur 2 et résoudre $\max_{x \in \mathcal{X}} x^\top A \bar{y}$ où \bar{y} résout $\min_{y \in \mathcal{Y}} \bar{x}^\top A y$
- ▶ Le joueur 1 doit donc résoudre

$$\max_{x \in \mathcal{X}} \left(\min_{y \in \mathcal{Y}} x^\top A y \right)$$

- ▶ Et le joueur 2 doit résoudre

$$\min_{y \in \mathcal{Y}} \left(\max_{x \in \mathcal{X}} x^\top A y \right)$$

Duaux des deux problèmes à résoudre

$$(1) \quad \max_{x \in \mathcal{X}} \left(\min_{y \in \mathcal{Y}} x^\top A y \right) = \max_{x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}} z$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} \mathbf{1}^\top z - x^\top A & \leq 0 \\ \mathbf{1}^\top x & = 1 \\ x & \geq 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad \min_{y \in \mathcal{Y}} \left(\max_{x \in \mathcal{X}} x^\top A y \right) = \min_{y \in \mathbb{R}^n, w \in \mathbb{R}} w$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} \mathbf{1} w - A y & \geq 0 \\ \mathbf{1}^\top y & = 1 \\ y & \geq 0 \end{cases}$$

De plus (2) est le dual de (1)

Théorème du minimax

Théorème

$$\max_{x \in \mathcal{X}} \left(\min_{y \in \mathcal{Y}} x^\top Ay \right) = \min_{y \in \mathcal{Y}} \left(\max_{x \in \mathcal{X}} x^\top Ay \right)$$

Corollaire

Il existe toujours des stratégies d'équilibre

En effet, si (\bar{x}, \bar{z}) résout (1) et si (\bar{y}, \bar{w}) résout (2), alors (\bar{x}, \bar{y}) sont des stratégies d'équilibre

1. Optimisation linéaire avec le solveur de Excel

2. Autres solveurs

3. Application : Approximations linéaires

4. Application : Jeux matriciels

Références

Références I



Ragsdale, C. (2010).

Spreadsheet Modeling & Decision Analysis.

South-Western, Cengage Learning, 6th edition.



Weatherford, L. (1997).

Introductory Management Science : Decision Modeling with Spreadsheets.

Prentice Hall, 5th edition.