

13. Introduction à la fiabilité

MTH2302D

S. Le Digabel, École Polytechnique de Montréal

A2017

(v1)

Plan

1. Introduction
2. Taux de panne
3. Distributions usuelles
4. Fiabilité des systèmes

1. Introduction

2. Taux de panne

3. Distributions usuelles

4. Fiabilité des systèmes

La théorie de la fiabilité sert à étudier l'aptitude de systèmes à fonctionner correctement durant une période donnée. Un dispositif peut se trouver dans l'un des deux états suivants :

- ▶ Apte à fonctionner correctement, c'est-à-dire en état de service.
- ▶ Inapte à fonctionner correctement, c'est-à-dire en panne ou hors-service.

Nous posons les hypothèses suivantes :

- ▶ Au départ, chaque dispositif est en état de service.
- ▶ Les défaillances se produisent généralement de façon aléatoire.

Nous définissons la **fiabilité** d'un dispositif pour une durée donnée comme étant la probabilité qu'aucune défaillance ne se produise pendant cette durée.

- ▶ Étant donné que les défaillances se produisent de façon aléatoire, et afin de pouvoir traiter le concept de fiabilité, nous associons à chaque dispositif une v.a. non négative T représentant la durée de vie (ou temps jusqu'à une panne) du dispositif.
- ▶ La **fiabilité** du dispositif à l'instant $t \geq 0$ est la probabilité qu'il fonctionne encore à l'instant t :

$$R(t) = P(T > t) = 1 - F_T(t) \in [0; 1] .$$

- ▶ Comme F_T est une fonction croissante, la fiabilité $R(T)$ est une fonction **décroissante**.
- ▶ $R(0) = 1$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = 0$.
- ▶ $P(t_1 < T \leq t_2) = R(t_1) - R(t_2)$.

- ▶ La v.a. T est généralement continue, mais elle peut parfois être discrète, par exemple si elle représente le nombre de cycles d'opération.
- ▶ Si T est continue, on note f sa densité, et si elle est discrète, on note p sa fonction de masse : $P(T = t) = p(t) \in [0; 1]$.
- ▶ $f(t) = F'_T(t) = -R'(t) \geq 0$.
- ▶ La **durée de vie moyenne**, ou *Mean Time To Failure* (MTTF), est donnée par $\tau = E(T)$.
- ▶ Si le système peut être réparé, on note :
 - ▶ *Mean Time Between Failures* (MTBF) : temps moyen entre deux pannes.
 - ▶ *Mean Time To Repair* (MTTR) : temps moyen de réparation.
 - ▶ On a $MTBF = MTTF + MTTR$.

► Cas discret :

$$\text{► } R(t) = P(T > t) = \sum_{i=t+1}^{\infty} p(i) = 1 - F_T(t) = 1 - \sum_{i=0}^t p(i).$$

$$\text{► } \tau = E(T) = \sum_{i=0}^{\infty} ip(i) \underset{\text{nouveau}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} R(i).$$

► Cas continu :

$$\text{► } R(t) = P(T > t) = \int_t^{\infty} f(s)ds = 1 - F_T(t) = 1 - \int_0^t f(s)ds.$$

$$\text{► } \tau = E(T) = \int_0^{\infty} tf(t)dt \underset{\text{nouveau}}{=} \int_0^{\infty} R(t)dt.$$

Exemple 1 : Prouver que $\tau = \sum_{i=0}^{\infty} R(i)$.

Exemple 2 : Exprimer $R(t)$ et τ si $T \sim \text{Exp}(\lambda)$.

1. Introduction

2. Taux de panne

3. Distributions usuelles

4. Fiabilité des systèmes

Taux de panne (ou taux de défaillance)

- ▶ Le taux de panne $r(t)$ est défini pour que la quantité $r(t)dt$ représente la probabilité qu'une machine fonctionnant encore après t unités de temps tombe en panne durant les dt unités de temps supplémentaires. On considère que dt est petit.
- ▶ $r(t)dt = P(t < T \leq t + dt | T > t)$.
- ▶ Le taux de panne est un bon indicateur de la valeur de la distribution comme modèle de fiabilité tenant compte de l'usure. Lorsque t est assez grand, r devrait être strictement croissante.
- ▶ Si T est discrète, $0 \leq r(k) \leq 1$ et

$$r(k) = \frac{p(k)}{\sum_{j=k}^{\infty} p(j)} = \frac{p(k)}{R(k-1)} \text{ pour } k \in \{0, 1, \dots\} .$$

Taux de panne : cas continu

► $r(t)dt \simeq \frac{f(t)dt}{R(t)}$ et comme $f(t) = -R'(t)$, on a

$$r(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)} \geq 0 .$$

► On peut en déduire que $R(t) = \exp\left(-\int_0^t r(x)dx\right)$.

Exemple 3 : Exprimer le taux de panne $r(t)$ si $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ et si $T \sim \text{Geom}(p)$.

Exemple 4 : Trouver $R(t)$, τ et $r(t)$ si $T \sim \text{Unif}(a, b)$ avec $a \geq 0$.

Exemple 5 : Prouver que $R(t) = \exp\left(-\int_0^t r(x)dx\right)$.

Taux de panne dans un intervalle

Le taux de panne d'un système dans un intervalle $]t_1; t_2]$ est défini par

$$FR(t_1, t_2) = \frac{P(t_1 < T \leq t_2 | T > t_1)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \frac{R(t_1) - R(t_2)}{R(t_1)}$$

avec $\Delta t = t_2 - t_1$ et $0 \leq t_1 < t_2$.

Si Δt devient très petit : $\lim_{\Delta t \downarrow 0} FR(t_1, t_2) = r(t_1)$.

Exemple 6 : Exprimer $FR(t_1, t_2)$ si $T \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Taux moyen de panne

Le taux moyen de panne d'un système dans un intervalle $]t_1; t_2]$ est défini par

$$AFR(t_1, t_2) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} r(t) dt = \frac{1}{\Delta t} [\ln(R(t_1)) - \ln(R(t_2))].$$

si $T \sim \text{Exp}(\lambda)$, $AFR(t_1, t_2) = \lambda$.

1. Introduction

2. Taux de panne

3. Distributions usuelles

4. Fiabilité des systèmes

Distributions usuelles : loi normale tronquée

- ▶ $T \sim \mathbf{N}^+(\mu, \sigma)$.
- ▶ $f_T(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma c}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ pour $t \geq 0$ et $c = (1 - \Phi(-\mu/\sigma))^{-1}$.
- ▶ On peut montrer que r est strictement croissante.

Distributions usuelles : loi exponentielle

Très utilisée mais peu réaliste à cause de son taux de panne constant. Elle est cependant souvent acceptable à condition de la considérer dans un intervalle de temps $[t_1; t_2]$ fini.

- ▶ $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.
- ▶ $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.
- ▶ $R(t) = e^{-\lambda t}$.
- ▶ $r(t) = \lambda$ (constante).
- ▶ $E(T) = \tau = 1/\lambda$.
- ▶ $FR(t_1, t_2) = \frac{1 - e^{-\lambda(t_2 - t_1)}}{t_2 - t_1}$.
- ▶ $AFR(t_1, t_2) = \lambda$.

Distributions usuelles : loi de Weibull

- ▶ $T \sim W(\lambda, \beta)$ avec $\lambda > 0$ et $\beta > 0$.
- ▶ $f(t) = \lambda\beta t^{\beta-1} \exp(-\lambda t^\beta)$ pour $t > 0$.
- ▶ $W(\lambda, \beta = 1) = \text{Exp}(\lambda)$.
- ▶ $R(t) = \exp(-\lambda t^\beta)$.
- ▶ $r(t) = \lambda\beta t^{\beta-1}$.
- ▶ r est croissante (**IFR** – *Increasing Failure Rate*) si $\beta > 1$ et décroissante (**DFR** – *Decreasing Failure Rate*) si $\beta < 1$. Si $\beta = 1$, r est constante (distribution exponentielle).
- ▶ $FR(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \left(1 - \exp(-\lambda(t_2^\beta - t_1^\beta)) \right)$.
- ▶ $AFR(t_1, t_2) = \frac{\lambda(t_2^\beta - t_1^\beta)}{t_2 - t_1}$.

Distribution de Weibull mixte

- ▶ **Motivation** : dans de nombreuses situations réelles, le taux de panne devrait d'abord décroître, puis stagner un certain temps, et enfin augmenter. Ces trois phases correspondent aux *pannes précoces*, aux *pannes aléatoires*, puis à l'*usure* : r adopte une forme de *baignoire*.
- ▶ On adopte la combinaison linéaire suivante :

$$T = c_1T_1 + c_2T_2 + c_3T_3$$

avec $T_i \sim W(\lambda, \beta_i)$ et $c_i > 0$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$, et $c_1 + c_2 + c_3 = 1$.

- ▶ Pour obtenir une baignoire, on prend $\beta_1 < 1$, $\beta_2 = 1$ (et donc $T_2 \sim \text{Exp}(\lambda)$), et $\beta_3 > 1$.

1. Introduction

2. Taux de panne

3. Distributions usuelles

4. Fiabilité des systèmes

Fiabilité des systèmes

- ▶ On s'intéresse à un ensemble de n composants ou sous-systèmes, montés en série ou en parallèle.
- ▶ On considère que les composants fonctionnent et tombent en panne de façon indépendante.
- ▶ On considère qu'un système ne peut être réparé.
- ▶ On s'intéresse donc au temps écoulé avant la première panne.
- ▶ Soient T_k la durée de vie du composant k , R_k sa fiabilité, et r_k son taux de panne.

Montages en série

- ▶ La durée de vie T du système est telle que

$$T > t \iff T_k > t \text{ pour tout } k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

- ▶ Donc $R(t) = P(T > t) = P(T_1 > t \cap T_2 > t \cap \dots \cap T_n > t)$
$$\underset{\text{ind}}{=} \prod_{k=1}^n P(T_k > t) = \prod_{k=1}^n R_k(t) \underset{\text{cas cont.}}{=} \prod_{k=1}^n \exp\left(-\int_0^t r_k(x) dx\right)$$

et donc

$$R(t) = \exp\left(-\int_0^t \left[\sum_{k=1}^n r_k(x)\right] dx\right).$$

- ▶ On note $T = \min\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$.

Montages en série (suite)

Si $T_k \sim \text{Exp}(\lambda_k)$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, alors :

- ▶ $T = \min\{T_1, T_2, \dots, T_n\} \sim \text{Exp}(\lambda)$ avec $\lambda = \sum_{k=1}^n \lambda_k$.
- ▶ $R(t) = e^{-\lambda t}$.
- ▶ $r(t) = \lambda$.
- ▶ $E(T) = 1/\lambda$.

Exemple 7 : Prouver le cas $n = 2$.

Exemple 8

Soit un montage en série de trois dispositifs qui fonctionnent et tombent en panne indépendamment. La distribution du temps de fonctionnement avant défaillance de chaque dispositif est exponentielle avec les taux de pannes $r_1 = 3 \times 10^{-2}$, $r_2 = 6 \times 10^{-3}$, et $r_3 = 4 \times 10^{-2}$.

1. Trouver $R(60)$ pour ce système.
2. Calculer le temps moyen de bon fonctionnement du système.

Montages en parallèle

On considère deux modes différents :

- ▶ **Redondance active** : tous les composants fonctionnent dès le temps $t = 0$. Il suffit qu'au moins un composant fonctionne pour que le système au complet fonctionne.
- ▶ **Redondance passive** : Seul le premier composant est mis en marche à $t = 0$. Une fois en panne, le deuxième composant prend le relai et ainsi de suite. Le système au complet tombe en panne quand le n -ième composant tombe en panne.

Montages en parallèle : redondance active

- ▶ La durée de vie T du système est telle que

$$T \leq t \iff T_k \leq t \text{ pour tout } k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

- ▶ Donc $F_T(t) = P(T \leq t) = P(T_1 \leq t \cap T_2 \leq t \cap \dots \cap T_n \leq t)$
 $= \prod_{\text{ind } k=1}^n P(T_k \leq t) = \prod_{k=1}^n (1 - R_k(t)).$

- ▶ Ainsi

$$R(t) = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - R_k(t)).$$

- ▶ On note $T = \max\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$.

Exemple 9 : Exprimer $R(t)$, $f(t)$, et $\tau = E(T)$ si $n = 2$, $T_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$, et $T_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2)$. Si $\lambda_1 = \lambda_2$, comparer τ avec le montage en série.

Montages en parallèle : redondance passive

- ▶ La durée de vie T du système est

$$T = T_1 + T_2 + \dots + T_n.$$

- ▶ $\tau = \mathbf{E}(T) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(T_k).$

- ▶ $\mathbf{V}(T) \underset{\text{ind}}{=} \sum_{k=1}^n \mathbf{V}(T_k).$

Redondance passive avec des lois exponentielles

Si $T_k \sim \text{Exp}(\lambda)$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$:

- ▶ $T \sim \Gamma(\alpha = n, \lambda)$ (loi Gamma).
- ▶ $R(t) = F_Y(n - 1)$ avec $Y \sim \text{Poi}(c = \lambda t)$, et donc

$$R(t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} .$$

Système k parmi n

Le système au complet fonctionne si au moins k composants fonctionnent.

- ▶ Si $k = n$, c'est le montage en série, et si $k = 1$, c'est le montage parallèle avec redondance active.
- ▶ Si les composants sont indépendants et s'ils ont tous la même fiabilité R_1 , alors

$$R(t) = P(N \geq k) \text{ avec } N \sim B(n, p = R_1(t)),$$

ou encore

$$R(t) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} R_1(t)^i (1 - R_1(t))^{n-i}.$$

Exemple 10

Soit $p(k) = 1/N$ pour $k = 1, 2, \dots, N$ la fonction de masse pour la durée de vie en cycles d'un système particulier. Calculer le taux de panne $r(k)$ pour $k = 1, 2, \dots, N$.

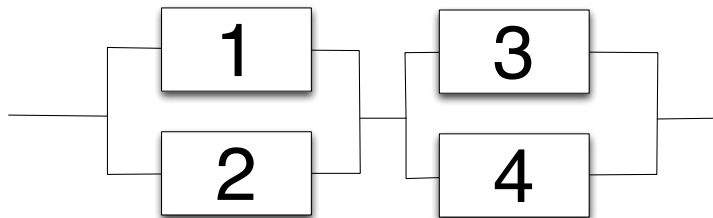
Exemple 11

Un système comporte deux composants qui fonctionnent indépendamment l'un de l'autre, à partir de l'instant initial. On suppose que les durées de vie en cycles X_1 et X_2 des deux composants présentent une distribution géométrique de paramètre $1/2$. Trouver la probabilité que les deux composants tombent en panne durant le même cycle.

Exemple 12

On considère quatre composants indépendants ayant une durée de vie présentant une distribution exponentielle, l'espérance de la durée de vie du k -ième composant étant égale à $1/k$.

Les composants sont utilisés pour construire le système ci-dessous :



Quelle est l'espérance de la durée de vie du système ?