

11. Tests d'hypothèses (partie 1/2)

MTH2302D

S. Le Digabel, École Polytechnique de Montréal

A2017

(v1)

Plan

1. Introduction

2. Hypothèses et erreurs

3. Tests d'hypothèses sur un seul échantillon

1. Introduction

2. Hypothèses et erreurs

3. Tests d'hypothèses sur un seul échantillon

Tests d'hypothèses : Introduction

Il s'agit d'une méthode statistique permettant de vérifier, entre autres, la valeur d'un paramètre, la forme d'une distribution, etc. Pour cela, les hypothèses décrivant la situation doivent être formulées et un test statistique est ensuite exécuté.

Exemple 1

On étudie la vitesse de combustion du carburant d'une fusée. Le cahier des charges exige que la vitesse moyenne de combustion soit de 40 cm/s.

Supposons que l'écart-type de cette vitesse soit d'environ $\sigma = 2$ cm/s.

L'expérimentateur veut vérifier si effectivement la moyenne est de 40 cm/s, à partir d'un échantillon de taille $n = 25$ dont la vitesse moyenne de combustion est $\bar{x} = 41.25$ cm/s.

1. Introduction

2. Hypothèses et erreurs

3. Tests d'hypothèses sur un seul échantillon

Définitions

Une *hypothèse statistique* H est une affirmation concernant

1. La valeur d'un paramètre (moyenne, variance, proportion, etc.)
2. L'égalité des paramètres de deux distributions (deux moyennes, deux variances, etc.)
3. La forme d'une distribution.

Remarques :

- ▶ Dans les deux premiers cas, on a une *hypothèse paramétrique*.
- ▶ Dans le troisième cas, on a une *hypothèse non paramétrique*.

Hypothèses

On suppose que l'on cherche à vérifier la valeur d'un paramètre inconnu θ de la distribution d'une population X .

Pour cela, on compare deux hypothèses portant sur la valeur de θ .

Définition

On distingue deux types d'hypothèse :

1. L'hypothèse nulle : $H_0 : \theta = \theta_0$.
2. L'hypothèse alternative (ou contre hypothèse) H_1 , qui peut prendre l'une des formes suivantes :
 - ▶ $H_1 : \theta \neq \theta_0$ (bilatérale).
 - ▶ $H_1 : \theta < \theta_0$ (unilatérale à gauche).
 - ▶ $H_1 : \theta > \theta_0$ (unilatérale à droite).

Hypothèses (suite)

Nous considérons d'abord le cas où H_1 est bilatérale ($\theta \neq \theta_0$).

Remarque : L'hypothèse nulle peut provenir :

- ▶ D'expériences antérieures. Dans ce cas, on cherche à savoir si les conditions ont changé.
- ▶ D'une théorie ou d'un modèle du problème. Dans ce cas, on cherche à déterminer si le modèle est valide.
- ▶ De considérations extérieures, comme des spécifications techniques. Dans ce cas on cherche à savoir si l'objet ou le processus est conforme.

Erreurs

Définition

1. L'erreur de première espèce (de type I) est

$$\alpha = P(\text{rejeter } H_0 \mid H_0 \text{ est vraie}).$$

2. L'erreur de deuxième espèce (de type II) est

$$\beta = P(\text{accepter } H_0 \mid H_0 \text{ est fausse}).$$

réalité décision	H_0 est vraie	H_0 est fausse
	accepter H_0	$1 - \alpha$
rejeter H_0	erreur de type I (α)	$1 - \beta$ (puissance)

Erreurs (suite)

décision \ réalité	H_0 est vraie	H_0 est fausse
accepter H_0	$1 - \alpha$	erreur de type II (β)
rejeter H_0	erreur de type I (α)	$1 - \beta$ (puissance)

Définition

- ▶ On appelle α le *seuil critique* ou le *seuil de signification* du test.
- ▶ La *puissance* du test est la probabilité de rejeter H_0 si H_0 est effectivement fausse, c'est-à-dire $1 - \beta$.

Exécution du test : les étapes détaillées

1. Formuler H_0 et H_1 .
2. Choisir α .
3. Considérer un échantillon de taille n .
4. Exécuter le test : par exemple vérifier si la statistique $|Z_0|$ est plus grande que $z_{\alpha/2}$.
5. Conclure en acceptant ou en rejetant H_0 :
 - ▶ Rejeter H_0 : conclusion forte.
 - ▶ Ne pas rejeter H_0 : conclusion faible.
6. Facultatif : calculer β et le risque de deuxième espèce.
7. Facultatif : si β est trop élevé, indiquer un nouveau α et/ou un nouveau n et recommencer.

Remarques

- ▶ En général, on veut que α et β soient petits.
- ▶ La probabilité α de l'erreur de première espèce est habituellement fixée à l'avance.
- ▶ La probabilité β de l'erreur de deuxième espèce dépend de
 - ▶ La valeur réelle du paramètre θ .
 - ▶ La taille n de l'échantillon.
- ▶ Pour α et n fixés, $\beta \equiv \beta(\theta)$ est une fonction du paramètre θ . Le graphe de cette fonction est appelé *courbe caractéristique* du test.
- ▶ **Idée** : On choisit H_0 et α de façon à minimiser le risque d'erreur de type I (la plus grave), et β (la proba. d'erreur de type II) est une conséquence de ce choix. Souvent $\alpha < \beta$.
- ▶ Si on veut diminuer β , il faut augmenter α et/ou n .

Exemple 2 : illustration du concept (cas 1)

On juge une personne et on formule les hypothèses suivantes :

H_0 : personne innocente

H_1 : personne coupable

décision \ réalité	personne innocente	personne coupable
innocenter la personne	$1 - \alpha$	err. type II (β)
condamner la personne	err. type I (α)	$1 - \beta$ (puissance)

- ▶ $P(\text{condamner un innocent}) = \alpha$.
- ▶ $P(\text{libérer un coupable}) = \beta$.

Ne pas condamner un innocent est prioritaire par rapport à ne pas libérer un coupable.

Exemple 2 : illustration du concept (cas 2)

On juge une personne et on formule les hypothèses suivantes :

H_0 : personne coupable

H_1 : personne innocente

décision \ réalité	personne coupable	personne innocente
	condamner la personne	$1 - \alpha$
innocenter la personne	err. type I (α)	$1 - \beta$ (puissance)

- ▶ $P(\text{libérer un coupable}) = \alpha$.
- ▶ $P(\text{condamner un innocent}) = \beta$.

Ne pas libérer un coupable est prioritaire par rapport à ne pas condamner un innocent.

Région critique

Le principe général d'un test d'hypothèse repose sur la considération d'une statistique et d'une *région critique*. Une région critique est une région où il est peu probable que la statistique prenne des valeurs lorsque l'hypothèse nulle est vraie. Le test consiste alors à :

- ▶ Rejeter H_0 si la valeur calculée de cette statistique est dans la région critique : *Conclusion forte*.
- ▶ Ne pas rejeter (\simeq accepter) H_0 si la valeur calculée est en dehors de la région critique : *Conclusion faible*.

1. Introduction

2. Hypothèses et erreurs

3. Tests d'hypothèses sur un seul échantillon

TH bilatéral sur la moyenne : cas où σ^2 est connue

Les trois étapes principales pour le test sont :

1. Formulation des hypothèses :

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

2. Calcul de la statistique pertinente avec les valeurs de l'échantillon :

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}. \text{ Si } H_0 \text{ est vraie, alors } Z_0 \sim N(0, 1) \text{ (} n \text{ grand).}$$

3. Acceptation ou rejet de H_0 :

- ▶ On calcule $z_{\alpha/2}$ tel que $\Phi(z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$.
- ▶ On rejette H_0 si $|Z_0| > z_{\alpha/2}$ ou on accepte H_0 si $|Z_0| \leq z_{\alpha/2}$ (voir illustration).

TH bilatéral sur la moyenne : cas où σ^2 est inconnue

à la place de Z_0 , on utilise la statistique

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}},$$

et

- ▶ On rejette H_0 si $|T_0| > t_{\alpha/2;n-1}$.
- ▶ On accepte H_0 si $|T_0| \leq t_{\alpha/2;n-1}$.

TH sur la moyenne : tests unilatéraux

Les formulations pour l'hypothèse alternative H_1 sont :

1. $H_0 : \mu = \mu_0$ (ou $\mu \geq \mu_0$) et $H_1 : \mu < \mu_0$
(unilatéral à gauche).
2. $H_0 : \mu = \mu_0$ (ou $\mu \leq \mu_0$) et $H_1 : \mu > \mu_0$
(unilatéral à droite).

Les statistiques du test sont les mêmes : $Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ (σ^2 connue)
ou $T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$ (σ^2 inconnue).

Les critères de rejet changent :

- | | |
|----------------------------|------------------------|
| $Z_0 < -z_\alpha$ | $Z_0 > z_\alpha$ |
| ou $T_0 < -t_{\alpha;n-1}$ | $T_0 > t_{\alpha;n-1}$ |
| (unilatéral à gauche). | (unilatéral à droite). |

Erreur de deuxième espèce β

Considérons les hypothèses

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

Si H_0 est fautive alors $\mu = \mu_1 = \mu_0 + \Delta$ avec $\Delta \neq 0$. Si σ^2 est connue, on peut montrer que

$$\beta = \beta(\Delta) = \Phi\left(z_{\alpha/2} - \frac{\Delta}{\sigma}\sqrt{n}\right) - \Phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\Delta}{\sigma}\sqrt{n}\right).$$

Exemple 3 : Prouver cette formule en commençant par montrer que $Z_0 \sim N\left(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sigma}, 1\right)$.

Erreur de deuxième espèce si σ^2 est connue (suite)

- ▶ Cas bilatéral : $H_1 : \mu \neq \mu_0$ ($\Delta \neq 0$) :

$$\beta(\Delta) = \Phi\left(z_{\alpha/2} - \frac{\Delta}{\sigma}\sqrt{n}\right) - \Phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\Delta}{\sigma}\sqrt{n}\right).$$

- ▶ Cas unilatéral gauche : $H_1 : \mu < \mu_0$ ($\Delta < 0$) :

$$\beta(\Delta) = \Phi\left(z_{\alpha} + \frac{\Delta}{\sigma}\sqrt{n}\right).$$

- ▶ Cas unilatéral droite : $H_1 : \mu > \mu_0$ ($\Delta > 0$) :

$$\beta(\Delta) = \Phi\left(z_{\alpha} - \frac{\Delta}{\sigma}\sqrt{n}\right).$$

Exemple 4 : Illustrer le cas unilatéral à droite.

Détermination de n si σ^2 est connue

- ▶ Cas bilatéral : $H_1 : \mu \neq \mu_0$ ($\Delta \neq 0$) :

$$n \simeq \left(\frac{\sigma(z_{\alpha/2} + z_{\beta})}{\Delta} \right)^2 .$$

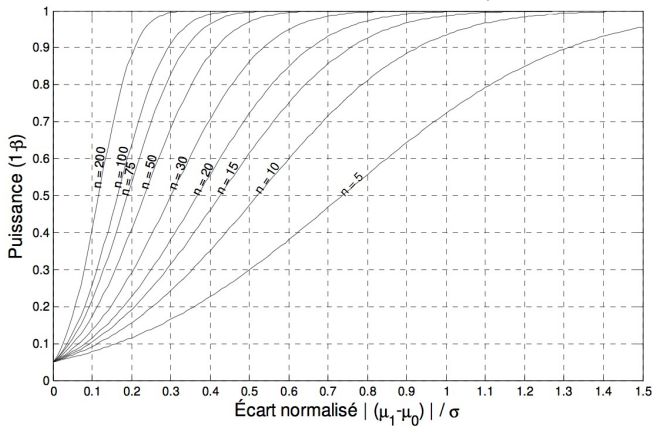
- ▶ Cas unilatéral gauche ou droite : ($\Delta < 0$ ou $\Delta > 0$) :

$$n = \left(\frac{\sigma(z_{\alpha} + z_{\beta})}{\Delta} \right)^2 .$$

Exemple 5 : Prouver le cas unilatéral.

Détermination graphique de β (ou de n)

On détermine graphiquement β en fonction de $d = |\Delta|/\sigma$ pour α et n donnés, avec des courbes comme ci-dessous (unilatéral droite, $\alpha = 5\%$).



Si σ est inconnue, prendre S ou une autre approximation.

Exemple 6

On étudie la vitesse de combustion du carburant d'une fusée. Le cahier des charges exige que la vitesse moyenne de combustion soit de 40 cm/s.

On sait que l'écart-type de cette vitesse est d'environ $\sigma = 2$ cm/s.

On se préoccupe de la probabilité β d'accepter $H_0 : \mu = 40$ cm/s alors que la vitesse moyenne de combustion est en réalité $\mu = 41$ cm/s.

1. Calculer la probabilité β si $\alpha = 0.05$ et $n = 25$.
2. Si on veut que le test détecte avec probabilité 0.80 un écart de 1 cm/s entre $\mu_0 = 40$ cm/s et la vitesse de combustion moyenne réelle, quelle taille d'échantillon faut-il utiliser ?

Niveau critique observé (P -value)

Définition

Le *niveau critique observé* (ou P -value) PV est la valeur minimale de α telle que H_0 est toujours rejetée.

- ▶ Avantage : Une fois que la P -value est connue, le décideur peut déterminer la décision du rejet ou non-rejet en utilisant n'importe quel seuil α .
- ▶ Si $\alpha > PV$, H_0 est rejetée.
- ▶ Inconvénient : calcul pas toujours facile.
- ▶ Lors d'un test, les logiciels donnent PV .
- ▶ Habituellement, si PV est grande, H_0 est acceptée.

Calcul de la P -value lors du test $H_0 : \mu = \mu_0$

Soit Z_0 la statistique employée pour un TH et z_0 (ou t_0) sa valeur calculée à partir d'un échantillon.

- ▶ Si σ^2 est connue :

cas unilatéral gauche $(H_1 : \mu < \mu_0)$ $PV = \Phi(z_0)$

cas unilatéral droite $(H_1 : \mu > \mu_0)$ $PV = 1 - \Phi(z_0)$

cas bilatéral $(H_1 : \mu \neq \mu_0)$ $PV = 2(1 - \Phi(|z_0|))$

- ▶ Si σ^2 est inconnue :

cas unilatéral $PV = P(T > |t_0|)$ avec $T \sim T_{n-1}$

cas bilatéral $PV = 2P(T > |t_0|)$ avec $T \sim T_{n-1}$

Exemple 7 : illustration de la P -value.

Relation avec les intervalles de confiance

Soit $[L, U]$ un intervalle de confiance pour un paramètre θ , de niveau de confiance $100(1 - \alpha)\%$.

Alors le test d'hypothèses au seuil critique α pour

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

$$H_1 : \theta \neq \theta_0$$

mène au rejet de H_0 si et seulement si $\theta_0 \notin [L, U]$.

Tests d'hypothèses avec un échantillon : autres cas

Le [formulaire](#) sur le site du cours résume les tests d'hypothèses pour différentes situations.

Les courbes caractéristiques pour β correspondantes sont normalement données dans les livres.

La P -value pour les différents cas peut être calculée avec STATISTICA ou R.

Exemple 8

Un fabricant de boissons gazeuses s'intéresse à l'uniformité du remplissage des canettes par une machine.

Soit X le volume de remplissage d'une canette. On suppose que X suit une loi normale.

Si la variance du volume de remplissage excède 15 mL^2 alors un pourcentage inacceptable de canettes ne seront pas remplies correctement.

Le fabricant veut donc tester si la variance est inférieure à 15 mL^2 .

Supposons que le niveau critique soit fixé à $\alpha = 0.05$.

Quelle est la probabilité d'accepter $H_0 : \sigma^2 = 15 \text{ mL}^2$ alors qu'en réalité la variance est d'au moins 25 mL^2 , avec un échantillon de 20 canettes ?

Exemple 9

On veut tester $H_0 : p = 0.2$ contre $H_1 : p > 0.2$. Un échantillon de taille $n = 50$ donne 11 “succès”.

1. Que peut-on conclure au niveau $\alpha = 5\%$?
2. Quelle taille supplémentaire doit-on prélever afin que H_0 soit rejetée 9 fois sur 10 lorsque $p = 0.24$?