9. Diagonalisation

MTH1008

Sébastien Le Digabel
Polytechnique Montréal

H2024

2023-12-18

v1

Plan

Liens avec le livre et exercices suggérés

5.3	Diagonalisation	1, 3, 5, 7, 11, 13, 15, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 32, 33, 35
5.4	Vecteurs propres et applications linéaires	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 26, 27, 31
5.5	Valeurs propres complexes	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17

1. Introduction

2. Diagonalisation d'une matrice

3. Vecteurs propres et applications linéaires

4. Valeurs propres complexes

Matrices semblables

Deux matrices carrées $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ de $\mathbb{R}^{n\times n}$ sont dites semblables s'il existe $\mathbf{P}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ inversible telle qu'on a les relations de similitude :

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}$$

et

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$$

$\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres

Relation matricielle entre valeurs et vecteurs propres

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ munie de ses n valeurs et vecteurs propres λ_i et $\mathbf{x}_i$, pour $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. On a donc $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$

Si on pose $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix}$ et

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

on aura

$$\mathbf{AS} = \mathbf{S\Lambda}$$

1. Introduction

2. Diagonalisation d'une matrice

3. Vecteurs propres et applications linéaires

4. Valeurs propres complexes

Définition

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale

On a alors

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$$

et

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$$

avec $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonale et $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible

Théorème

Supposons que la matrice $\mathbf{A}$ de taille $n \times n$ possède n vecteurs propres **linéairement indépendants** $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ et soit $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix}$. On a alors

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}^{-1}$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de $\mathbf{A}$

Ce théorème affirme que $\mathbf{A}$ et $\mathbf{\Lambda}$ sont semblables et que $\mathbf{A}$ peut être *diagonalisée* si ses vecteurs propres sont linéairement indépendants

Remarques

- La diagonalisation est possible seulement si les vecteurs propres sont linéairement indépendants
- Les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{\Lambda}$ ont les mêmes valeurs propres (matrices semblables) mais pas les mêmes vecteurs propres
- Les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^k$ ont les mêmes vecteurs propres mais pas les mêmes valeurs propres

Théorème

Des vecteurs propres $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ d'une matrice qui correspondent à des valeurs propres distinctes (non égales) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ sont linéairement indépendants

Si de plus la matrice est symétrique, alors les vecteurs propres sont orthogonaux

Théorème

Si, pour une valeur propre donnée, on a MG $<$ MA, alors la matrice n'est *pas* diagonalisable

Si, pour **toutes** les valeurs propres, on a MG $=$ MA, alors la matrice est diagonalisable

Rappel : Pour chaque valeur propre d'une matrice on a MG $\leq$ MA

Puissances

Si $\mathbf{A}$ est diagonalisable alors $\mathbf{A} = \mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{S}^{-1}$ et $\mathbf{A}^k = \mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda}^k\mathbf{S}^{-1}$, où

$$\boldsymbol{\Lambda}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

Application :

Résolution d'équations de récurrence de la forme $\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{u}_k$, avec $\mathbf{u}_0$ fixé. Si $\mathbf{A}$ est diagonalisable alors la solution est

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{u}_0 = \mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda}^k\mathbf{S}^{-1}\mathbf{u}_0$$

Exercice 1

Diagonaliser les matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

1. Introduction

2. Diagonalisation d'une matrice

3. Vecteurs propres et applications linéaires

4. Valeurs propres complexes

Endomorphismes de $\mathbb{R}^n$

- On considère T un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$:

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

(application d'un espace vers lui-même)

- T est considérée linéaire avec $T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ et on considère aussi que $\mathbf{A}$ est diagonalisable :

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}^{-1}$$

- Les colonnes de $\mathbf{S}$ forment une base de $\mathbb{R}^n$, qu'on note $\mathcal{B}$

Matrice de T dans $\mathcal{B}$

- La matrice de T dans la base $\mathcal{B}$ est notée $[T]_{\mathcal{B}}$ et est telle que, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, on a

$$[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

- Et on a

$$\mathbf{\Lambda} = [T]_{\mathcal{B}}$$

- Les applications $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ et $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{\Lambda}\mathbf{u}$ décrivent le même endomorphisme dans deux bases différentes

Exercice 2

Illustrer le concept avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{x} = (1, 1)$$

en vérifiant que $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = (3, -2)$ et $[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} = (15, -6)$

Exercice 3

Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{bmatrix}$$

Remarquer que $\overline{\lambda_1} = \lambda_2$ et $\overline{\mathbf{x}_1} = \mathbf{x}_2$

Val. et vec. propres complexes d'une matrice réelle

Avec $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, si $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, alors $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{x}}$

$\Longrightarrow$ Les valeurs propres complexes (avec une partie imaginaire non nulle) sont deux à deux conjuguées et associées à des vecteurs propres complexes conjugués aussi

Propriété des matrices 2×2

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ admettant la valeur propre $\lambda = a - \mathrm{i}b$ $(b \neq 0)$ et soit $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^2$ un vecteur propre associé à λ. Alors

$$\mathbf{A} = \mathbf{PCP}^{-1}$$

avec

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\,\mathbf{v} & \mathrm{Im}\,\mathbf{v} \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Exercice 4 : Illustrer avec les données de l'exercice 3