

# MTH1008 — Algèbre linéaire appliquée

## Série 9 : Diagonalisation

### Exercices (énoncés)

Les numéros renvoient au manuel [alfa](#) (série d'exercices.numéro).

#### Exercice 11.1 vrai ou faux (★)

Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

1. Si  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont diagonalisables dans  $\mathbb{R}$ , alors  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  l'est.
2. Si  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont diagonalisables dans la même base alors  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ .
3. Si  $\mathbf{A}$  est diagonalisable et inversible, alors  $\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}$  est diagonalisable.
4. Toute matrice triangulaire est diagonalisable.
5.  $\mathbf{0}_n$  appartient toujours au sous-espace propre associée à une valeur propre  $\lambda$ .
6. Soit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  et la forme quadratique  $q$  définie par  $q(\mathbf{x}) = 2x_1x_2$ . La matrice  $\mathbf{A}$  telle que  $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$  possède 0 comme valeur propre.

#### Exercice 11.3 (★★)

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables dans  $\mathbb{R}$  ?

1.  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & 5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$
2.  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$
3.  $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

#### Exercice 11.4 (★★)

Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension 3. On note  $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$  une base de  $V$ . On considère l'endomorphisme  $T_1 : V \rightarrow V$  défini par :

$$\begin{aligned} T_1(\mathbf{b}_1) &= 6\mathbf{b}_1 + 4\mathbf{b}_2 \\ T_1(\mathbf{b}_2) &= \mathbf{b}_1 + 6\mathbf{b}_2 \\ T_1(\mathbf{b}_3) &= \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + 4\mathbf{b}_3 \end{aligned}$$

1. À quels espaces vectoriels connus  $V$  pourrait-il correspondre ? En citer deux, et fournir une base pour chacun d'entre eux.

2. Donner la matrice  $\mathbf{M}$  de  $T_1$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
3. Montrer que  $\mathbf{c}_1 = (1, 2, 0)$  est un vecteur propre de  $\mathbf{M}$ , donner sa valeur propre associée.
4. Montrer qu'il existe  $\mathbf{c}_2$  et  $\mathbf{c}_3$ , deux vecteurs non colinéaires de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\text{Ker}(\mathbf{M} - 4\mathbf{I})$ .
5. La famille  $\mathcal{C} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$  est-elle une base de  $\mathbb{R}^3$  ?
6. Quel est le lien entre  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$  ?
7. Que dire de l'application  $T_2 : V \rightarrow V$  définie par :
 
$$\begin{array}{rcl} T_2(\mathbf{c}_1) & = & 16\mathbf{c}_1 \\ T_2(\mathbf{c}_2) & = & 8\mathbf{c}_2 \\ T_2(\mathbf{c}_3) & = & 8\mathbf{c}_3 \end{array} \quad ?$$

### Exercice 11.5 (★)

Considérons la matrice  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

- (a)  $\mathbf{A}$  est-elle inversible ?
- (b) Vérifier que  $(4, -2, 1)$  est un vecteur propre de  $\mathbf{A}$ .
- (c) Déterminer toutes les valeurs propres de  $\mathbf{A}$  ainsi que leur multiplicité algébrique et leur multiplicité géométrique.

### Exercice 11.6 (★)

Montrer que si  $\mathbf{A}$  est semblable à  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{A}$  est semblable à  $\mathbf{C}$ , alors  $\mathbf{B}$  est semblable à  $\mathbf{C}$ .

### Exercice 11.7 (★)

Montrer que les matrices suivantes sont toutes semblables entre elles :  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ et } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

### Exercice 11.8 diagonaliser avec subtilité (★★)

Si  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , laquelle des propositions suivantes est équivalente à l'énoncé «  $\mathbf{A}$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  » ?

1. Les sous-espaces propres associés à chacune des valeurs propres de  $\mathbf{A}$  ont tous la même dimension.

2.  $\mathbf{A}$  admet  $n$  valeurs propres distinctes.
3. On peut construire une base de  $\mathbb{R}^n$  constituée de  $n$  vecteurs propres de  $\mathbf{A}$ .
4. Les valeurs propres de  $\mathbf{A}$  sont toutes strictement positives.

**Exercice 11.9 valeurs propres d'une matrice de rotation (★★)**

Soit la matrice de rotation  $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ .

1. Calculer les valeurs propres de  $R_\theta$  en fonction de  $\theta \in \mathbb{R}$ .
2. Pour quelles valeurs de  $\theta$  les valeurs propres de  $R_\theta$  sont-elles réelles ?
3. On choisit  $\theta = \pi$ . La matrice  $R_\theta$  est-elle diagonalisable ?

**Exercice 11.10 (★)**

Notons  $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ .

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}$ .
2. Déterminer les vecteurs propres associés aux valeurs propres de  $\mathbf{A}$ .

**Exercice 11.11 (★)**

Soit la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Montrer que si  $\mathbf{v}_1 \in \text{Ker}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})$  et  $\mathbf{v}_2 \in \text{Ker}(\mathbf{A} - 8\mathbf{I})$ , alors  $\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2$ .

**Exercice 11.16 (★)**

Soit  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ .

1. Déterminer les valeurs propres de  $\mathbf{A}$ , leur multiplicité algébrique et leur multiplicité géométrique.
2. La matrice  $\mathbf{A}$  est-elle diagonalisable ?
3. Si oui, exhiber  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{D}$  telles que  $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$ .

**Exercice 11.17 (★)**

Soit  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ .

1. Calculer les valeurs propres de  $\mathbf{A}$ , leur multiplicité algébrique et leur multiplicité géométrique.

2.  $\mathbf{A}$  est-elle diagonalisable ?
3. Si oui, fournir  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{D}$  réalisant  $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$ .

**Exercice 11.18** (★)

Étudier la diagonalisation de  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  en répondant aux questions suivantes :

1. Donnez les valeurs propres et leurs multiplicités.
2. La matrice est-elle diagonalisable ? Justifiez.

**Exercice 11.19** (★)

Soit  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ .

1. Déterminer le spectre de  $\mathbf{A}$  et les dimensions des sous-espaces propres.
2. Conclure sur la diagonalisabilité de  $A$ .
3. Si possible, expliciter  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{D}$  telles que  $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$ .

**Exercice 11.20** (★)

Soit  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

1. Déterminer ses valeurs propres (dans  $\mathbb{C}$ ) et les sous-espaces propres associés.
2.  $\mathbf{A}$  est-elle diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  ? Sur  $\mathbb{C}$  ?
3. Donner, dans le corps approprié, une factorisation  $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$ .

**Exercice 11.21** (★)

Soit  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ .

1. Déterminer les valeurs propres de  $\mathbf{A}$ , et pour chacun, donner un vecteur propre associé.
2. La matrice  $\mathbf{A}$  est-elle diagonalisable ?
3. Si oui, exhiber  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{D}$  telles que  $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$ .

**Exercice 11.22** (★)

Pour chacun des cas suivants, donner une matrice  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  qui satisfait les contraintes données.

1.  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  et toute valeur propre de  $\mathbf{A}$  est un réel.
2. Au moins un élément de  $\mathbf{A}$  est un imaginaire pur, et toute valeur propre de  $\mathbf{A}$  est un imaginaire pur.
3.  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  et toute valeur propre de  $\mathbf{A}$  est un imaginaire pur.
4. Au moins un élément de  $\mathbf{A}$  est un imaginaire pur, et toute valeur propre de  $\mathbf{A}$  est un réel.

### Exercice 11.23 (\*)

Soit  $\mathbf{A}$  carrée qui ne possède qu'une seule valeur propre distincte, soit  $|\text{Sp}(\mathbf{A})| = 1$ . Montrer que  $\mathbf{A}$  est diagonalisable si et seulement si  $\mathbf{A}$  est diagonale.

### Exercice 11.24 hyperplan et noyau (\*\*)

Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Donner le polynôme caractéristique ainsi que les valeurs propres de  $\mathbf{A}$ .
2. Donner la multiplicité géométrique de chaque valeur propre de  $\mathbf{A}$ .
3. Est-ce que  $\mathbf{A}$  est diagonalisable ?
4. Soit  $T$  l'application linéaire telle que  $[T]_{\mathcal{E}} = \mathbf{A}$ ,  $\mathcal{E}$  étant la base canonique.
  - (a) Donner le noyau  $\text{Ker}(T)$  de l'application  $T$ .
  - (b) L'application  $T$  est-elle singulière ?
  - (c) Existe-t-il une base  $\mathcal{B}$  telle que  $[T]_{\mathcal{B}}$  est la matrice  $\mathbf{M}$  ci-dessous ?

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$