8. Valeurs propres

MTH1008

Sébastien Le Digabel
Polytechnique Montréal

H2024

2023-12-18

v1

Plan

Liens avec le livre et exercices suggérés

5.1	Valeurs propres et vecteurs propres	1,4,5,7,9,11,13, 15, 17, 19, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 31, 35
5.2	Équations et polynôme caractéristiques	1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 30

Définitions

Soit $\mathbf{A}$ une matrice **carrée** de taille $n \times n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur **non nul** et $\lambda \in \mathbb{R}$

Si

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

alors

- $\mathbf{x}$ est un *vecteur propre* de $\mathbf{A}$ $\quad (\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$
- λ est une *valeur propre* de $\mathbf{A}$

Exemples d'applications

Source : Wikipedia.

- Étude des phénomènes vibratoires (Ex. : Mouvements d'une corde vibrante)
- *"Mise au point d'algorithmique rapide de résolution d'équations linéaires"*
- Cryptologie
- Chimie : *"les états stables des électrons sont modélisés par des vecteurs propres dont les valeurs propres correspondent à des états d'énergie"*
- *PageRank* : Basé sur l'approximation d'un vecteur propre de la matrice d'adjacence du graphe du Web. Voir ce lien

etc.

Remarques (1/2)

- L'ensemble des valeurs propres de $\mathbf{A}$ est noté $\lambda(\mathbf{A})$ et est appelé le *spectre* de $\mathbf{A}$
- Si $\mathbf{x}$ est un vecteur propre alors tout multiple $k\mathbf{x}$ l'est aussi
- Les vecteurs propres associés à $\lambda \neq 0$ sont dans $\mathrm{Im}(\mathbf{A})$
- Les vecteurs propres associés à $\lambda = 0$ sont les vecteurs de $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$
- Si $\lambda = 0$ est une valeur propre alors $\mathbf{A}$ est singulière (non inversible)
- Si le rang de $\mathbf{A}$ est r, on aura $n - r$ *valeurs propres nulles*
- Les vecteurs propres associés à la valeur propre λ sont les vecteurs de $\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$
- $\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) =$ sous-espace propre de $\mathbf{A}$ associé à λ
- Si λ est une valeur propre de $\mathbf{A}$, alors $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ est singulière

Remarques (2/2)

- Tous les $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ sont les vecteurs propres de $\mathbf{I}$ avec la valeur propre associée $\lambda = 1$
- $\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \lambda^k\mathbf{x}$: Les vecteurs propres de $\mathbf{A}^k$ sont les mêmes que $\mathbf{A}$ tandis que les valeurs propres sont élevées à la puissance k (fonctionne aussi avec $k = -1$ si $\mathbf{A}$ est inversible)
- Commandes `MATLAB` :
  - La fonction `[S,Λ] = eig(A)` donne les valeurs propres de $\mathbf{A}$ dans la matrice diagonale $\mathbf{\Lambda}$ et les vecteurs propres comme les colonnes de $\mathbf{S}$. On ainsi $\mathbf{S\Lambda} = \mathbf{AS}$
  - Le programme `eigshow` permet d'illustrer le concept des valeurs/vecteurs propres

1. Valeurs et vecteurs propres

2. Polynôme caractéristique

Outil : Déterminant des matrices 2×2 et 3×3

- $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
- $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - gec - ahf - dbi$

Polynôme caractéristique de A

- Le nombre λ est une valeur propre de la matrice $\mathbf{A}$ si et seulement si

$$p(\lambda) := \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

- Autrement dit, les valeurs propres sont les racines du *polynôme caractéristique* $p(\lambda)$ de la matrice $\mathbf{A}$
- Si $\mathbf{A}$ est de taille $n \times n$ alors p est un polynôme de degré n
- On va donc avoir au plus n valeurs propres réelles

Trouver les valeurs et vecteurs propres de $\mathbf{A}$

1. Former la matrice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ et calculer $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$

Trouver les valeurs et vecteurs propres de A

1. Former la matrice $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ et calculer $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$

2. Trouver les racines du polynôme caractéristique p pour obtenir les valeurs propres de $\mathbf{A}$

Trouver les valeurs et vecteurs propres de A

1. Former la matrice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ et calculer $p(\lambda) = \det\left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right)$
2. Trouver les racines du polynôme caractéristique p pour obtenir les valeurs propres de $\mathbf{A}$
3. Pour chaque valeur propre λ trouvée à la deuxième étape, résoudre

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad \text{ou} \quad \left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

   pour trouver les vecteurs propres correspondants

Remarques (1/2)

- Il est possible que $p(\lambda)$ possède une racine de multiplicité supérieure à 1. Dans ce cas, il est possible que plusieurs vecteurs propres soient associés à cette valeur propre
- Il est aussi possible que $p(\lambda)$ possède une racine complexe et des vecteurs propres complexes
- Les opérations élémentaires sur les lignes **changent** les valeurs et les vecteurs propres

Remarques (2/2)

- Pour une matrice triangulaire, les valeurs propres sont ses éléments diagonaux

- Si $\mathbf{A}$ est de taille $n \times n$ alors

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \text{trace } \mathbf{A}$$

- Si $\mathbf{A}$ est de taille $n \times n$ alors

$$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \det \ \mathbf{A}$$

Multiplicités géométrique et algébrique

Si λ est une valeur propre de $\mathbf{A}$ alors il y a deux points de vue :

1. Géométrique : il existe des vecteurs non nuls tels que $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$
2. Algébrique : $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$

- Ceci correspond à deux nombres :
  1. *Multiplicité géométrique* (MG) : le nombre de vecteurs propres linéairement indépendants associés à λ. C'est la dimension du sous-espace propre $\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$
  2. *Multiplicité algébrique* (MA) : la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique $p(\lambda)$
- Pour chaque valeur propre d'une matrice on a MG $\leq$ MA

Exemples

Illustrer les différents concepts sur les matrices

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ et } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Et avec des valeurs propres complexes, pour $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$