

MTH1008 — Algèbre linéaire appliquée

Série 8 : Valeurs propres

Exercices (énoncés)

Les numéros renvoient au manuel [alfa](#) (série d'exercices.numéro).

Exercice 7.1 vrai ou faux (★)

Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? Justifiez.

1. Pour n'importe quelle matrice donnée $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, n'importe quel vecteur de $\mathbb{R}^n$ est toujours un vecteur propre associé à une valeur propre de $\mathbf{A}$.
2. Soit $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ le polynôme caractéristique d'une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ quelconque. Si $(\lambda + 3)$ est en facteur dans le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$, alors 3 appartient au spectre de $\mathbf{A}$ ($3 \in \text{Sp}(\mathbf{A})$).
3. Soient $\mathbf{A}, \mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\mathbf{B} = \mathbf{E}\mathbf{A}$ où $\mathbf{E}$ est une matrice d'élimination. Alors, $\text{Sp}(\mathbf{A}) = \text{Sp}(\mathbf{B})$.
4. Soient $\mathbf{A}, \mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{A}$ où $\mathbf{P}$ est une matrice de permutation. Alors, $\text{Sp}(\mathbf{A}) = \text{Sp}(\mathbf{B})$.
5. Soient $\mathbf{A}, \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\mathbf{B} = \mathbf{D}\mathbf{A}$ où $\mathbf{D}$ est une matrice diagonale (qui effectue une mise à l'échelle). Alors, $\text{Sp}(\mathbf{A}) = \text{Sp}(\mathbf{B})$.
6. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont sur sa diagonale.
7. Les valeurs propres d'une matrice réelle carrée $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont toujours réelles.
8. La multiplicité géométrique des valeurs propres peuvent être obtenus à partir d'une expression en facteurs irréductibles du polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$, $p_{\mathbf{A}}$.
9. La multiplicité géométrique d'une valeur propre est toujours supérieure ou égale à sa multiplicité algébrique.
10. Une matrice $n \times n$ possède au plus n valeurs propres distinctes.

Exercice 7.2 (★)

Soient les six matrices $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, et $\mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Pour chacune d'entre elles, donner les valeurs propres et des vecteurs propres, dans des matrices diagonales de valeurs propres $\mathbf{\Lambda}_i$, et dans des matrices de vecteurs propres $\mathbf{\Sigma}_i$, telles que $\mathbf{A}_i \mathbf{\Sigma}_i = \mathbf{\Sigma}_i \mathbf{\Lambda}_i$ pour $i \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$. Spécifier aussi, pour chaque $\lambda \in \text{Sp}(\mathbf{A}_i)$, $i \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$, les multiplicités $\mu_{\mathbf{A}_i}^a(\lambda)$ et $\mu_{\mathbf{A}_i}^g(\lambda)$.

Exercice 7.4 (★)

Soient $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 2 \\ -20 & 8 & 5 \\ -8 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ ainsi que les vecteurs $\mathbf{x}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{x}_2 = (1, 0, 4)$, $\mathbf{x}_3 = (2, 8, 0)$, $\mathbf{x}_4 = (0, 2, 3)$ et $\mathbf{x}_5 = (2, 5, 2)$.

1. Déterminer, pour chaque $\mathbf{x}$, s'il s'agit d'un vecteur propre de $\mathbf{A}$, et donner la valeur propre associée le cas échéant.
2. Donner la multiplicité algébrique chaque valeur propre associée à l'un des $\mathbf{x}$ donné.
3. Donner la multiplicité géométrique chaque valeur propre associée à l'un des $\mathbf{x}$ donné.

Exercice 7.5 (★)

Soit la matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ suivante.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 2 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

1. Vérifier que $\lambda = 1$ est une valeur propre de $\mathbf{A}$.
2. Donner une base de son sous-espace propre.

Exercice 7.6 (★)

Soit un scalaire $c \in \mathbb{R}$ ainsi que la matrice symétrique

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 31 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 23 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 13 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Calculer les valeurs propres de A et donner leur multiplicité algébrique.

Exercice 7.7 (★)

Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & -2 \\ 2 & 6 & 10 & -4 \\ 2 & 8 & 12 & -6 \\ 2 & 10 & 14 & -8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

Sachant que $\mathbf{v}_0 = (7, 8, 9, 10)$ est un vecteur propre associé à une certaine valeur propre de $\mathbf{A}$ répondez à la question suivante. Soit trois valeurs $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$ et $\lambda_3 = 14$. Pour chacune de ces valeurs, dites si elle est une valeur propre de $\mathbf{A}$. Si oui, donnez une base du

sous-espace propre de $\mathbf{A}$ associé à cette valeur. Finalement, indiquez s'il existe une autre valeur propre associée à $\mathbf{A}$.

Exercice 7.8 valeurs propres d'une matrice de rang un (★★)

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Donner les trois valeurs propres de $\mathbf{A}$ sans utiliser son polynôme caractéristique.

Exercice 7.9 (★★)

Donner une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ possédant deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 de telle sorte que λ_1 soit de multiplicité géométrique 2 et λ_2 soit de multiplicité géométrique 1.

Exercice 7.10 (★)

Soit la matrice suivante $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 2 \\ 5 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$, où une des valeurs propres de $\mathbf{A}$ est -1 .

1. Calculez les valeurs propres de $\mathbf{A}$.
2. La multiplicité algébrique de chaque valeur propre de $\mathbf{A}$ est-elle égale à sa multiplicité géométrique ?

Exercice 7.11 (★)

Soit la matrice suivante $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Calculez les valeurs propres de $\mathbf{A}$ ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre de $\mathbf{A}$.
2. La multiplicité algébrique de chaque valeur propre de $\mathbf{A}$ est-elle égale à sa multiplicité géométrique ?

Exercice 7.12 (★)

Soit une matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 5 \end{bmatrix}$, dont une des valeurs propres est $\lambda_1 = 6$. Donner une base du sous-espace propre de $\mathbf{A}$ associé à λ_1 .

Exercice 7.13 (★)

Trouvez le polynôme caractéristique de la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 11 & -6 & 0 \\ -2 & 10 & 0 \\ 4 & 8 & 14 \end{bmatrix}$. Donner les valeurs propres de $\mathbf{A}$ et une base de chacun des sous-espace propre de $\mathbf{A}$.

Exercice 7.14 (★)

Pour $\theta \in [0, 2\pi[$, donnez les valeurs propres de la matrice de rotation $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ en fonction de θ . Donnez un vecteur propre pour chaque valeur propre.

Exercice 7.15 (★)

Soit la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{15}{2} & -5 & \frac{15}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{15}{2} & -\frac{27}{8} \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de $\mathbf{A}$ ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre de $\mathbf{A}$.
2. Vérifiez que la trace de $\mathbf{A}$ est égale à la somme des valeurs propres de $\mathbf{A}$. Vérifiez que le produit des valeurs propres de $\mathbf{A}$ est égale au déterminant de $\mathbf{A}$.

Exercice 7.16 (★)

Soit la matrice $\mathbf{A}$ suivante

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -7 \\ 4 & 15 & 7 \\ 6 & -6 & -23 \end{bmatrix}.$$

1. Calculez les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sachant qu'une d'entre elles est -11 .
2. Vérifiez que la trace de $\mathbf{A}$ est égale à la somme des valeurs propres de $\mathbf{A}$. Vérifiez que le produit des valeurs propres de $\mathbf{A}$ est égale au déterminant de $\mathbf{A}$.
3. Calculez une base du sous-espace propre associé à la valeur propre -11 .
4. Que vaut $\det(\mathbf{A} + 11\mathbf{I})$?

Exercice 7.17 (★★)

Soit deux matrices, $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Montrez que le spectre de $\mathbf{AB}$ est le même que le spectre de $\mathbf{BA}$.

Exercice 7.19 (★)

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice inversible dont le spectre est $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. Montrer que le spectre de $\mathbf{A}^{-1}$ est $\left\{ \frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n} \right\}$.

Exercice 7.20 (★)

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, une matrice inversible et $c \in \mathbb{C}$. Si le spectre de $\mathbf{A}$ est $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, montrer que le spectre de $\mathbf{A} + c\mathbf{I}$ est $(\lambda_1 + c, \lambda_2 + c, \dots, \lambda_n + c)$.

Exercice 7.21 (★★)

Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Sachant que

$$\mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Sans calculer les valeurs propres de $\mathbf{A}$, montrez que $\mathbf{A}$ ne possède aucune valeur propre différente de 0.
2. Donner le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ sans utiliser les coefficients de la matrice $\mathbf{A}$.
3. Donner une base du sous-espace propre de $\mathbf{A}$ associé à 0 et sa dimension.

Exercice 7.22 (★)

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, une matrice hermitienne. Montrer que ses valeurs propres sont nécessairement réelles.

Exercice 7.23 (★★★)

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, la matrice suivante

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Sachant que 5 est une valeur propre de $\mathbf{A}$, calculer les valeurs propres de $\mathbf{A}$.

Exercice 7.24 (★)

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, une matrice à coefficient réel, montrez que si $\mathbf{A}$ possède une valeur propre complexe $\lambda \in \mathbb{C}$ dans son spectre, alors le complexe conjugué $\bar{\lambda}$ appartient aussi au spectre de $\mathbf{A}$.

Exercice 7.25 (★★)

Trouver une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ qui ne possède aucun coefficient nul et possédant qu'une valeur propre complexe. Si ce n'est pas possible, prouver le.

Exercice 7.26 (★★)

Trouvez les valeurs propres de la matrice de permutation suivante.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 7.27 (★)

Montrer que les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont sur sa diagonale.

Exercice 7.28 (★)

Donner un exemple d'une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ pour laquelle le spectre d'une de ses formes échelonnées n'est pas le même que $\mathbf{A}$.

Exercice 7.29 (★)

Calculez le polynôme caractéristique de la matrice suivante.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Exprimer le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$.
2. Calculez le déterminant de $\mathbf{A}$.

Exercice 7.30 (★★★)

Soit la matrice $\mathbf{A}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tridiagonale symétrique suivante

$$\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & \ddots & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Calculez le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}_4$.
2. Pour n'importe quel entier naturel $n \in \mathbb{N}$ donnez une expression du polynôme caractéristique de $\mathbf{A}_n$.

Exercice 7.31 (★)

Deux vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes sont-ils nécessairement orthogonaux? Si oui, prouver-le. Si non, donner un contre-exemple.

Exercice 7.33 (★)

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (1+i) & 1 & 0 \\ (2+2i) & 2 & (3+i) \\ 0 & 0 & 4i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$. Calculez les valeurs propres de $\mathbf{A}$. Les valeurs propres complexes viennent-elles en paire de complexes conjugués?

Exercice 7.34 valeurs propres de la transposée (★★)

Soit $\mathbf{A}$ une matrice carrée. Montrer que $\lambda \in \text{Sp}(\mathbf{A}) \Leftrightarrow \lambda \in \text{Sp}(\mathbf{A}^\top)$.

Exercice 7.36 (★★)

Soit

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

la matrice de rotation d'angle θ centrée à l'origine dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que pour tout $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $\mathbf{R}_\theta$ n'admet aucune valeur propre réelle.

Exercice 7.37 (★★)

Soit n vecteurs propres associés à n valeurs propres distinctes d'une matrice réelle $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Montrer que ces n vecteurs propres forment une famille linéairement indépendante.