7. Nombres complexes et matrices hermitiennes

MTH1008

Sébastien Le Digabel
Polytechnique Montréal

H2024

2023-12-18

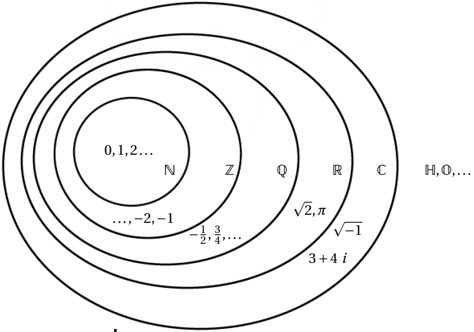
v1

Plan

Liens avec le livre et exercices suggérés

Annexe B Nombres complexes

Classification des nombres



- $\mathbb{N}$: Entiers naturels
- $\mathbb{Z}$: Entiers relatifs
- $\mathbb{Q}$: Nombres rationnels (s'écrivent sous la forme p/q)
- $\mathbb{R}$: Nombres réels
- $\mathbb{C}$: Nombres complexes

Nombre complexe

- Un nombre complexe, noté $z \in \mathbb{C}$, est une expression de la forme
$$z = a + \mathrm{i}b$$
  - $a, b \in \mathbb{R}$
  - i est l'unité imaginaire avec
    - $\mathrm{i}^2 = -1$
    - $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$
    - ($\sqrt{-c} = \mathrm{i}\sqrt{c}$ pour tout réel c positif ou nul)
- L'ensemble des nombres complexes est défini par
$$\mathbb{C} = \{a + \mathrm{i}b, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$
- $z = a + \mathrm{i}b$ est la forme algébrique de z
- On écrit :
  - $a = \mathrm{Re}(z)$ la partie réelle du nombre complexe z
  - $b = \mathrm{Im}(z)$ la partie imaginaire de z (ne pas confondre avec l'image)

Application : Exemple 1

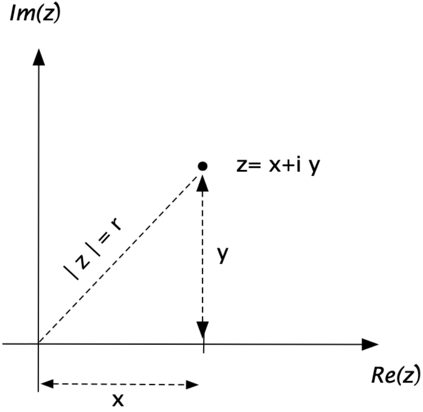
Trouver les racines de

$$x^2 + x + 1 = 0$$

Théorème fondamental de l'algèbre : Tout polynôme de degré n possède exactement n racines (réelles ou complexes), en tenant compte des multiplicités

Plan complexe

Les nombres complexes peuvent être interprétés géométriquement dans un plan en 2D :



Opérations de base

- Égalité : $a + \mathrm{i}b = c + \mathrm{i}d \iff a = c$ et $b = d$
- Addition et soustraction :
  $(a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d) = (a + c) + \mathrm{i}(b + d)$
  $(a + \mathrm{i}b) - (c + \mathrm{i}d) = (a - c) + \mathrm{i}(b - d)$
- Multiplication : $(a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d) = (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc)$
- Division :

$$\frac{a + \mathrm{i}b}{c + \mathrm{i}d} = \frac{(a + \mathrm{i}b)(c - \mathrm{i}d)}{(c + \mathrm{i}d)(c - \mathrm{i}d)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \mathrm{i}\frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

Exemple 2 : Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{1}{1 + \mathrm{i}} \qquad\qquad z_2 = \frac{1 - 2\mathrm{i}}{3 + \mathrm{i}}$$

Conjugué

Le conjugué de $z = a + ib$, noté $\overline{z}$, est défini comme

$$\overline{z} = a - ib$$

On a :

- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 / z_2} = \overline{z_1} / \overline{z_2}$
- $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ pour tout n

Module

Le module de $z = a + ib$, noté $|z|$ est défini comme

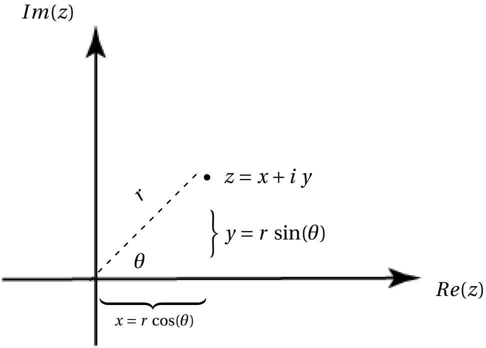
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}^+$$

On a :

- $|\overline{z}| = |z|$
- $z\overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$
- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$
- Inégalité triangulaire : $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Remarque : Si le nombre z est réel (i.e. $b = 0$), alors son module est égal à sa valeur absolue : $|a| = \sqrt{a^2}$

Forme polaire



$$\begin{aligned} z &= x + \mathrm{i}y \\ &= r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos\theta &= x/r \\ \sin\theta &= y/r \\ \tan\theta &= y/x \end{aligned}$$

- r est le module de z : $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- θ est l'argument de z : $\theta = \arg(z)$

(l'argument n'est pas unique : les $\arg(z)$ diffèrent par des multiples de 2π)

Forme polaire : Propriétés

Avec $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\ \sin\theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\ \sin\theta_2)$, on a

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)) \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)) \text{ pour } z_2 \neq 0 \\
\arg(z_1 z_2) &= \arg(z_1) + \arg(z_2) = \theta_1 + \theta_2 \\
\arg(z_1/z_2) &= \arg(z_1) - \arg(z_2) = \theta_1 - \theta_2
\end{aligned}$$

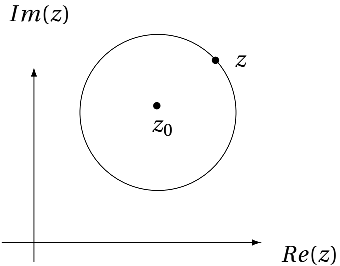
Cas particuliers, avec $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$:

- $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta)$
- $z^2 = r^2(\cos 2\theta + \mathrm{i}\sin 2\theta)$
- $z^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta)$

(formule de Moivre, prouvée plus loin avec la forme exponentielle)

Application : Courbes et régions

- La relation $|z - z_0| = \rho$ représente un cercle de rayon ρ et $|z - z_0| \leq \rho$ représente l'intérieur du cercle (disque) :



- Les relations $\mathrm{Re}(z) = cste$ et $\mathrm{Im}(z) = cste$ représentent des droites
- Les inégalités $\mathrm{Re}(z) \leq cste$ et $\mathrm{Im}(z) \geq cste$ représentent des demi-plans

1. Définitions

2. Forme polaire

3. Formule d'Euler et forme exponentielle

4. Racines d'un nombre complexe

5. Matrices hermitiennes

Formule d'Euler et forme exponentielle (1/3)

Formule d'Euler : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$$

(preuve avec les séries entières)

D'où la forme exponentielle :

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = re^{\mathrm{i}\theta}$$

Et donc

$$\begin{aligned} \overline{z} &= r\, e^{-\mathrm{i}\theta} \\ |z| &= r \\ |e^{\mathrm{i}\theta}| &= 1 \text{ pour tout } \theta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Formule d'Euler et forme exponentielle (2/3)

On déduit de la formule d'Euler les expressions

$$\cos\theta = \frac{e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{\mathrm{i}\theta} - e^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$$

Formule d'Euler et forme exponentielle (3/3)

Avec $z = re^{i\theta}$, on a

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} &= \mathrm{i} \\ e^{\mathrm{i}\pi} &= -1 \text{ (identité d'Euler)} \\ \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} &= 1 + \mathrm{i} \\ e^{\mathrm{i}(0+2k\pi)} &= 1 \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Exemple 3

Mettre sous forme exponentielle les nombres

$$z_1 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$$
$$z_2 = 9\mathrm{i}$$
$$z_3 = -3$$
$$z_4 = \frac{-\mathrm{i}\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}}$$
$$z_5 = \frac{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^3}{(1-\mathrm{i})^5}$$

Formule de Moivre (ou de de Moivre)

Pour tout nombre $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout nombre entier $n \in \mathbb{Z}$,

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \left(e^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = e^{\mathrm{i}n\theta} = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta$$

Ainsi

$$z^n = \left(re^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta)$$

1. Définitions

2. Forme polaire

3. Formule d'Euler et forme exponentielle

4. Racines d'un nombre complexe

5. Matrices hermitiennes

Racines d'un nombre complexe (1/2)

Soient a et b deux nombres réels connus. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle racine n-ième du nombre complexe $a + \mathrm{i}b$ tout nombre complexe z tel que

$$z^n = a + \mathrm{i}b$$

En particulier, on appelle racine n-ième de l'unité tout nombre complexe z vérifiant :

$$z^n = 1$$

Racines d'un nombre complexe (2/2)

Pour rechercher les racines n-ièmes de $a + \mathrm{i}b$, il suffit d'exprimer $a + \mathrm{i}b$ sous forme exponentielle, c'est à dire :

$$\begin{aligned} z^n &= a + \mathrm{i}b \\ &= |a + \mathrm{i}b| e^{\mathrm{i}(\theta + 2k\pi)} \text{ pour } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

et de déduire les n racines

$$z = |a + \mathrm{i}b|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\mathrm{i}(\theta + 2k\pi)}{n}} \text{ pour } k = 0, 1, \ldots, n - 1$$

Exemple 4 : Trouver les racines quatrièmes de 1

Norme d'un vecteur complexe

Soit $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ un vecteur complexe. La transposée conjuguée de $\mathbf{z}$ est

$$\mathbf{z}^* = (\overline{\mathbf{z}})^\top = \begin{bmatrix} \overline{z_1} & \overline{z_2} & \cdots & \overline{z_n} \end{bmatrix}$$

et sa norme au carré est

$$\|\mathbf{z}\|^2 = \mathbf{z}^*\mathbf{z} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots + |z_n|^2$$

Exemple 5 : Donner la norme de $(1, \mathrm{i})$ et comprendre pourquoi il est nécessaire d'utiliser le conjugué (sinon on aurait une norme nulle pour un vecteur non nul)

Produit scalaire

Soient $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{C}^n$ et $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{C}^n$

- Le produit scalaire de $\mathbf{u}$ avec $\mathbf{v}$ est

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^* \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \overline{u_1} & \overline{u_2} & \cdots & \overline{u_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \overline{u_1} v_1 + \overline{u_2} v_2 + \ldots + \overline{u_n} v_n \in \mathbb{C}$$

- Attention : $\mathbf{u}^* \mathbf{v} \neq \mathbf{v}^* \mathbf{u}$ mais $\mathbf{u}^* \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v}^* \mathbf{u}}$
- Si $\mathbf{u}^* \mathbf{v} = 0$, alors $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont orthogonaux

Exemple 6 : Montrer que $(1, \mathrm{i})$ et $(1, -\mathrm{i})$ sont orthogonaux

Matrice hermitienne

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. La transposée conjuguée de $\mathbf{A}$ est

$$\mathbf{A}^* = (\overline{\mathbf{A}})^\top$$

propriété : $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$

$\mathbf{A}$ est hermitienne, ou auto-adjointe, si

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$$

C'est la généralisation du concept de matrice réelle symétrique

Quelques propriétés des matrices hermitiennes

- Toutes les matrices réelles symétriques sont hermitiennes
- La diagonale principale d'une matrice hermitienne est réelle
- Si $\mathbf{A}$ hermitienne, $\mathbf{z}^*\mathbf{A}\mathbf{z}$ sera toujours réel pour tout $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$
- Les valeurs propres d'une matrice hermitienne sont réelles
- Les vecteurs propres d'une matrice hermitienne sont orthogonaux