

MTH1008 — Algèbre linéaire appliquée

Série 7 : Nombres complexes

Exercices (énoncés)

Les numéros renvoient au manuel [alfa](#) (série d'exercices.numéro).

Exercice 3.1 vrai ou faux (★★)

Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = \mathcal{R}e(z)$ alors $z \in \mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{C} = \mathbb{R}$.
3. $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est l'ensemble des imaginaires purs.
4. Le module d'un nombre complexe z est toujours un nombre réel positif ou nul.
5. Si n est un entier positif, alors l'ensemble des solutions de $z^n = 1$ est inclus dans celui de $z^{2n} = 1$.
6. Avec $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on peut déterminer si $z_1 < z_2$.
7. L'argument d'un nombre complexe est unique.
8. Si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, alors $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.
9. Pour tous z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}$, $\mathcal{R}e(z_1 z_2) = \mathcal{R}e(z_1) \mathcal{R}e(z_2)$.
10. Tout nombre complexe non nul a deux racines 2-ièmes distinctes.
11. Si z est un nombre complexe, alors e^z est toujours un nombre réel.
12. Si $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, alors $\mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^\top + \mathbf{A})$ est hermitienne.
13. Si $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, alors $\mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^* + \mathbf{A})$ est hermitienne.

Exercice 3.2 (★★)

Soient $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + \frac{1}{2}i$, $z_3 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, $z_4 = \sqrt{2}e^{i9\pi/4}$, $z_5 = -2e^{i\pi}$, et $z_6 = 3e^{i4\pi}$. Déterminer si les énoncés ci-dessous sont vrais ou faux.

1. $z_1 \geq z_2$.
2. $z_1 \neq z_2$.
3. $z_1 = z_3$.
4. $z_1 \geq z_3$.
5. $z_3 = z_4$.
6. $z_5 < z_6$.
7. $iz_5 < iz_6$.

Exercice 3.3 (★)

Donner l'ensemble des solutions de $x^2 - 2x + 5 = 0$.

Exercice 3.4 (★)

Soient $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 + 3i$, et $z_3 = 5i$.

1. Donner $\operatorname{Im}(z_1)$, $\operatorname{Im}(z_2)$, et $\operatorname{Im}(z_3)$.
2. Donner $\operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_3)$ puis $\operatorname{Re}(z_1 + z_3)$.
3. Donner $z_1 + z_2$ et $z_1 - z_3$ sous forme algébrique.
4. Donner $z_1 z_2$ et $z_2 z_3$ sous forme algébrique.

Exercice 3.5 (★)

Soit $z = 3 - 4i$.

1. Donner le conjugué de z .
2. Calculer le module de z .
3. Vérifier que $z\bar{z} = |z|^2$.

Exercice 3.6 inverse multiplicatif (★)

Avec $z = 3 - 4i$, illustrer explicitement (c'est-à-dire en effectuant la multiplication) que

$$z \times \frac{1}{z} = 1 .$$

Exercice 3.7 (★)

Donner la forme algébrique de $\frac{7+i}{1-2i}$.

Exercice 3.8 (★)

Soient $z_1 = 2 + 3i$ et $z_2 = -1 + 4i$.

1. Calculer la somme $z_1 + z_2$ et donner le résultat sous forme algébrique.
2. Calculer le produit $z_1 z_2$ et donner le résultat sous forme algébrique.
3. Calculer le quotient $\frac{z_1}{z_2}$ et donner le résultat sous forme algébrique.

Exercice 3.9 (★)

Soient $z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

1. Donner z_1 et z_2 sous forme algébrique.
2. Calculer le produit $z_1 z_2$ et donner le résultat sous forme exponentielle et sous forme polaire.

3. Calculer le quotient $\frac{z_1}{z_2}$ et donner le résultat sous forme exponentielle et sous forme polaire.

Exercice 3.10 (★)

Soient $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

1. Déterminer le module et un argument de $z_1 z_2$.
2. Donner la forme exponentielle $z_1 z_2$.
3. Faire la même chose pour $\frac{z_1}{z_2}$.

Exercice 3.11 unité et argument opposé (★)

Soient z_1 et z_2 des complexes non nuls tels que $|z_1| = |z_2|$ et $\text{Arg}(z_1) = -\text{Arg}(z_2)$.

1. Montrer que $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $z_1 z_2 > 0$.
3. Illustrer avec $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{5}}$ et $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{5}}$.

Exercice 3.12 (★)

Soient $z_1 = -3 - i\sqrt{3}$, $z_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} - i$, $z_3 = -5 + 5i$, et $z_4 = 10$.

1. Donner z_1, z_2, z_3 , et z_4 sous forme exponentielle.
2. Donner $z_1 z_2$, $z_3 z_4$, et z_1/z_3 sous forme exponentielle.
3. Donner z_3^4 sous forme exponentielle.

Exercice 3.13 (★)

Soit $z = -5 + 5i$.

1. Calculer le module et l'argument principal de z .
2. Écrire z sous forme exponentielle.
3. Écrire $1/z$ puis $1/\bar{z}$ sous forme algébrique.

Exercice 3.14 (★)

Soit $z = -1 + i\sqrt{3}$.

1. Déterminer le module et l'argument principal de z .
2. Écrire z sous forme exponentielle.
3. Calculer z^6 et donner le résultat sous forme algébrique.

Exercice 3.15 (★★★)

Déterminer l'argument principal des complexes suivants :

1. $z_1 = (1 + \sqrt{3}) + i(\sqrt{3} - 1)$;
2. $z_2 = (2 + \sqrt{2}) + i\sqrt{2}$;
3. $z_3 = -(1 + \sqrt{3}) - i(\sqrt{3} - 1)$.

Exercice 3.16 (★★)

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$.

1. Montrer que $z/\bar{z} = i$.
2. Avec l'hypothèse supplémentaire que $\operatorname{Re}(z) > 0$, exprimer z sous sa forme exponentielle.

Exercice 3.17 (★★)

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Montrer que $|z| = 1$ si et seulement si $\frac{1+z}{1-z}$ est un imaginaire pur dans les deux situations suivantes :

1. Si z est un imaginaire pur.
2. Si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Exercice 3.18 (★)

Exprimer $z_1 = 2 + i\sqrt{12}$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$ sous forme polaire et sous forme exponentielle, puis calculer $z_1 z_2$ et $\frac{z_1}{z_2}$, et les donner sous forme exponentielle.

Exercice 3.19 (★)

Soit $z = e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

1. Donner trois arguments de z .
2. Donner l'argument principal de z .

Exercice 3.20 (★)

Soient $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

1. Donner les formes exponentielles de z_1 et z_2 .
2. Donner $z_1 z_2$ sous forme exponentielle puis sous forme polaire.
3. Donner z_1/z_2 sous forme exponentielle puis sous forme polaire.

Exercice 3.21 (★★)

Soit $z = \frac{(1+i\sqrt{3})^3}{1-i}$.

1. Donner le module de z .
2. Donner la forme algébrique de $\bar{z}$.

Exercice 3.22 (★)

Soit $z = -3e^{i\frac{\pi}{3}}$.

1. Est-ce que cette écriture de z est sous forme exponentielle ?
2. Si non, écrire la forme exponentielle de z .

Exercice 3.23 (★★)

Soit $z = 2 + 2i\sqrt{3} \in \mathbb{C}$.

1. Exprimer z sous forme exponentielle.
2. Calculer z^3 .
3. Déterminer les racines 3-ièmes de z .

Exercice 3.24 (★★)

Simplifier $\frac{(1+i\sqrt{3})^3}{(1-i)^5}$.

Exercice 3.25 (★★)

Calculer le module de $z = \frac{3i(2+3i)^3}{(1+5i)^2}$.

Exercice 3.26 i puissance i (★★★)

Montrer que i^i est un nombre réel. Nuancer ce résultat en utilisant la notion d'argument principal.

Exercice 3.28 racines d'un polynôme de degré trois (★★★)

Soient $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ un complexe avec une partie imaginaire non nulle, des réels a, b, c , et $d \neq 0$, et le polynôme $p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{C})$ tel que $p(z) = a + bz + cz^2 + dz^3 = 0$.

1. Montrer que $p(\bar{z}) = 0$.
2. On rappelle que p a exactement trois racines selon le théorème « d'Alembert-Gauss, ou théorème fondamental de l'algèbre » (théorème fondamental de l'algèbre), puisque $\deg(p) = 3$. On a pu constater que deux d'entre elles sont z et $\bar{z}$. Soit $r \in \mathbb{C}$ la troisième racine et on suppose que $r \neq z$ et $r \neq \bar{z}$. Montrer que $r \in \mathbb{R}$.¹
3. Était-il possible que $r = z$ ou $r = \bar{z}$?

La conclusion à tirer de cet exercice est que, dès lors qu'un polynôme de degré trois possède une racine complexe, alors nécessairement la conjuguée de cette racine est une autre racine, et on aura une troisième racine réelle. Ces trois racines sont distinctes.

1. Suggestion : utiliser la propriété du conjugué d'un réel de la proposition « propriétés du conjugué » : $r \in \mathbb{R} \iff r = \bar{r}$.

Exercice 3.29 (★★)

Illustrer l'exercice 3.28 en donnant les racines du polynôme $p(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 2$.

Exercice 3.30 (★★)

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq -1$. Montrer que $\left| \frac{1-z}{1+z} \right| < 1$ si et seulement si $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Exercice 3.31 inégalité triangulaire 1 (★★★)

Soient z_1 et z_2 deux complexes. On rappelle l'inégalité triangulaire du théorème « inégalité triangulaire pour les nombres complexes » :

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| .$$

En examinant la preuve du théorème « inégalité triangulaire pour les nombres complexes », déterminer la ou les conditions pour que cette inégalité devienne l'égalité

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| .$$

Exercice 3.32 inégalité triangulaire 2 (★)

1. Soient $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$|z_1 + z_2 + z_3| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| .$$

2. Vérifier cette inégalité pour $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -2 + 2i$, et $z_3 = -1 - 3i$.

Exercice 3.33 racines 4-ièmes (★)

1. Déterminer l'ensemble $S \subset \mathbb{C}$ des solutions de $z^4 = -16$. Donner chaque solution sous forme exponentielle et sous forme algébrique.
2. Décrire la géométrie des éléments de S dans le plan complexe.

Exercice 3.34 somme des racines n -ièmes de l'unité (★★)

Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i \frac{2k\pi}{n}} = 0 .$$

Exercice 3.35 norme et transconjuguée (★)

Soit $\mathbf{x} = (2 + i, -1 + 3i, 4) \in \mathbb{C}^3$.

1. Donner le conjugué et le transconjugué de $\mathbf{x}$.

2. Calculer la norme de $\mathbf{x}$.

Exercice 3.36 produit scalaire et orthogonalité (★)

Soient les vecteurs $\mathbf{x} = (1, -i)$ et $\mathbf{y} = (2, 2i)$.

1. Calculer le produit scalaire $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.
2. Les vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont-ils orthogonaux ?
3. Calculer l'angle $\theta \in [0; \pi]$ défini par $\cos(\theta) = \frac{\operatorname{Re}(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle)}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}$.

Exercice 3.37 (in)égalité de Cauchy-Schwarz (★★)

On rappelle le théorème « inégalité de Cauchy-Schwarz » : Pour $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, on a

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| .$$

En utilisant la preuve du théorème « inégalité de Cauchy-Schwarz », donner la (ou les) condition d'égalité.

Exercice 3.38 inégalité de Cauchy-Schwarz (★)

Vérifier l'inégalité de Cauchy-Schwarz du théorème « inégalité de Cauchy-Schwarz » avec les vecteurs $\mathbf{x} = (1, 1)$ et $\mathbf{y} = (1, -i)$.

Exercice 3.39 mini-étude de $\mathbf{A}^* \mathbf{A}$ (★)

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

1. Montrer que $\mathbf{B} = \mathbf{A}^* \mathbf{A}$ est hermitienne.
2. Montrer que $\overline{\mathbf{B}} = \mathbf{B}^\top$.
3. Montrez que $\mathbf{B}^\top + \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Exercice 3.40 matrices hermitiennes (★★)

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 3 \end{bmatrix}$.

1. Donner la transconjugée de $\mathbf{A}$.
2. $\mathbf{A}$ est-elle hermitienne ?
3. Montrer que $\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \in \mathbb{R}$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^2$.
4. Vérifier cette propriété pour $\mathbf{x} = (1, i)$.

Exercice 8.4 expression du noyau d'une matrice complexe (★)

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & i & 2i & 5 + 13i \\ -2 & 1 - i & -3i & -12 - 19i \\ 3 & 3i & 1 + 6i & 22 + 39i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 4}$. Exprimer le noyau de $\mathbf{A}$.

Exercice 8.5 résolution d'un système avec des complexes ($\star$)

Soient $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2i & -3 + 2i \\ 2i & 3 & 5 + i \\ 1 & 2 & 1 + i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ et $\mathbf{b} = (-7 + 8i, 18 + 7i, 7 + 3i)$. Résoudre le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.