6. Applications linéaires

MTH1008

Sébastien Le Digabel
Polytechnique Montréal

H2024

2024-03-21

v2

Plan

Liens avec le livre et exercices suggérés

1.8	Introduction aux applications linéaires	2, 4, 8, 9, 11, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 24, 27, 31, 33, 35, 37, 39
1.9	Matrice d'une application linéaire	2, 4, 6, 8, 11, 13, 16, 18, 20, 21, 23, 29, 32, 35, 36

Introduction

- Avec $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, l'équation

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

permet de "passer" de $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^m$: $\mathbf{A}$ transforme $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ en $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$

- C'est l'application / la fonction / la transformation

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ \mathbf{x} &\mapsto T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} \end{aligned}$$

- $T(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$ est appelé l'image de $\mathbf{x}$ par T, et l'ensemble de tous les $T(\mathbf{x})$ pour tous les $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, forme l'image de T, qui est aussi l'image de $\mathbf{A}$: $\mathrm{Im}(\mathbf{A}) = \{T(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$

Application et application linéaire

L'application $T : U \to V$, avec U et V deux sev, est un *procédé* qui associe un unique vecteur $T(\mathbf{x}) \in V$ pour tout vecteur $\mathbf{x} \in U$

De plus, T est dite linéaire si

1. $T(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = T(\mathbf{a}) + T(\mathbf{b})$ pour tous $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ dans U
2. $T(c\mathbf{a}) = cT(\mathbf{a})$ pour tout $\mathbf{a} \in U$ et tout scalaire c

qui peut aussi se formuler par

$$T(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha T(\mathbf{a}) + \beta T(\mathbf{b})$$

pour tous $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ dans U, et α, β des scalaires

Propriétés

- Toute transformation matricielle $T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ est linéaire
- Toute application linéaire est matricielle
- $T(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V$
  où $\mathbf{0}_U$ est le vecteur nul de U, et $\mathbf{0}_V$ est le vecteur nul de V
- $T(a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \ldots + a_p\mathbf{x}_p) =$
  $a_1T(\mathbf{x}_1) + a_2T(\mathbf{x}_2) + \ldots + a_pT(\mathbf{x}_p)$ avec a_i un scalaire et $\mathbf{x}_i$ un vecteur de U, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$

Image et noyau

Soit T une application de U dans V avec $\dim U = n$ et $\dim V = m$

- L'image de T est le sev de V

$$\mathrm{Im}(T) = \{T(\mathbf{x}) \text{ pour tout } \mathbf{x} \in U\} \subseteq V$$

- Le noyau de T est le sev de U

$$\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{x} \in U : T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} \subseteq U$$

Si T est linéaire et $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est la matrice associée, alors $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Im}(\mathbf{A}) \subseteq \mathbb{R}^m$ et $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(\mathbf{A}) \subseteq \mathbb{R}^n$

Cas particulier : Homothétie

Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ avec $T(\mathbf{x}) = r\mathbf{x}$ pour r un scalaire fixé

- T est une homothétie qui peut être qualifiée de contraction si $0 \leq r \leq 1$ ou de dilatation si $r > 1$
- T est une application linéaire car c'est une transformation matricielle particulière : $T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ avec $\mathbf{A} = r\mathbf{I}$

Introduction

Matrice d'une application linéaire

Exemples de transformations géométriques

Existence et unicité

Matrice d'une application linéaire

Pour toute application linéaire $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, il existe une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ unique telle que pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

et $\mathbf{A}$ se trouve par la formule

$$\mathbf{A} = [T(\mathbf{e}_1)\ T(\mathbf{e}_2)\ \ \ldots\ \ T(\mathbf{e}_n)]$$

$\mathbf{A}$ est appelée la matrice canoniquement associée à T

Exercice 1

Déterminer $\mathbf{A}$ pour $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lorsque

- T est l'homothétie $T(\mathbf{x}) = 3\mathbf{x}$
- T est la rotation centrée à l'origine d'angle φ

Exercice 1

Déterminer $\mathbf{A}$ pour $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lorsque

- T est l'homothétie $T(\mathbf{x}) = 3\mathbf{x}$
- T est la rotation centrée à l'origine d'angle φ

Réponse :

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Produit matriciel = composition d'applications

Soient les applications linéaires T_1 et T_2 associées aux matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$. Le produit $\mathbf{AB}$ correspond à la composition $T_1 \circ T_2$:

$$\mathbf{ABx} = \mathbf{A}(T_2(\mathbf{x})) = T_1(T_2(\mathbf{x})) = T_1 \circ T_2(\mathbf{x})$$

Introduction

Matrice d'une application linéaire

Exemples de transformations géométriques

Existence et unicité

Note

- Pour cette section d'exemples géométriques, il est important de consulter les figures du manuel à partir de la page 79, qui illustrent les différentes transformation sur une image

- Tous les exemples considèrent $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et sa matrice associée $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Dilatations

- Dilatation horizontale : $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Dilatation verticale : $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$
- Distinguer les cas

$$\begin{array}{rcl} 1 < & k & \\ 0 < & k & < 1 \\ -1 < & k & < 0 \\ & k & < -1 \end{array}$$

Réflexions

- Par rapport à l'axe des x : $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
- Par rapport à l'axe des y : $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Par rapport à la droite $y = x$: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- Par rapport à l'origine $\mathbf{0} = (0, 0)$: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Transvections

- Transvection horizontale : $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Transvection verticale : $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$
- Distinguer les cas $k < 0$ et $k > 0$

Rotations

De l'exercice 1, si T est la rotation centrée à l'origine d'angle φ, alors

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Projections

- Sur l'axe des x : $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- Sur l'axe des y : $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Sur la droite $y = x$: $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
- Sur l'origine $\mathbf{0} = (0,0)$: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Exercice 2

Décrire les inverses des matrices précédentes

Introduction

Matrice d'une application linéaire

Exemples de transformations géométriques

Existence et unicité

Existence : Application surjective

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est dite surjective si tout vecteur de $\mathbb{R}^m$ est l'image **d'au moins** un vecteur de $\mathbb{R}^n$ (par T)

- T surjective $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^m$
- T surjective $\Leftrightarrow$ le système $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ possède au moins une solution pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
- T non surjective $\Leftrightarrow$ il existe $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ tel que le système $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ ne possède pas de solution

Unicité : Application injective

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est dite injective si tout vecteur de $\mathbb{R}^m$ est l'image **d'au plus** un vecteur de $\mathbb{R}^n$ (par T)

- T injective $\Leftrightarrow$ le système $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ possède soit une solution unique, soit aucune, pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
- T non injective $\Leftrightarrow$ il existe $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ tel que le système $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ possède une infinité de solutions
- T injective $\Leftrightarrow$ $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ne possède que la solution triviale $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, c'est à dire $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$ si $T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$

Injection et surjection avec $\mathbf{A}$ telle que $T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$

T surjective ssi

- $\mathrm{Im}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^m$
- $r(\mathbf{A}) = m$: $\mathbf{A}$ est de plein rang ligne
- Les lignes de $\mathbf{A}$ sont indépendantes

T injective ssi

- $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = \mathbb{Z}$
- $r(\mathbf{A}) = n$: $\mathbf{A}$ est de plein rang colonne
- Les colonnes de $\mathbf{A}$ sont indépendantes

Exercice 3

Montrer que l'application associée à

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

est surjective et non injective

Matrices et applications inversibles

- Une application T à la fois injective et surjective est dite bijective. La matrice associée $\mathbf{A}$ est alors une matrice carrée de plein rang (inversible)

- Pour $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, les énoncés suivants sont équivalents :
  - **a** $\mathbf{A}$ inversible
  - **f** T injective
  - **i** T surjective

- Si $\mathbf{A}$ est inversible, alors T est dite inversible aussi, et son inverse est T^{-1} l'application linéaire associée à $\mathbf{A}^{-1}$

- Si T est inversible, on aura
  - $T(T^{-1}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
  - $T^{-1}(T(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$