5. Espaces vectoriels, bases et dimension

MTH1008

Sébastien Le Digabel
Polytechnique Montréal

H2024

2024-02-19

v2

Plan

Espaces de vecteurs

Sous-espaces vectoriels

Noyau et image

Bases et dimension

La dimension des quatre sous-espaces

Changements de base

Liens avec le livre et exercices suggérés

4.1	Espaces vectoriels et sous espaces vectoriels	1, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 15, 19, 21, 22, 24, 25, 29, 31, 32, 33, 36
4.2	Noyau, image et applications linéaires	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 24, 26, 27, 29, 33, 35, 37, 39
4.3	Familles libres et bases	1,3,5,7,11,13, 15, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37
4.5	Dimension d'un espace vectoriel	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 32, 33
4.6	Rang	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34 (compléter les exercices déjà faits en semaine 3)
4.7	Changement de base	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15,17, 18, 19

Espaces de vecteurs

Sous-espaces vectoriels

Noyau et image

Bases et dimension

La dimension des quatre sous-espaces

Changements de base

Espaces de vecteurs

Un *espace vectoriel* (réel) est un ensemble V muni de deux opérations : si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont des éléments de V et $c \in \mathbb{R}$ alors on définit des éléments

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$
6. $c\mathbf{u} \in V$

Ces deux opérations satisfont à 8 propriétés supplémentaires telles que la commutativité, l'associativité, etc.

Remarques :

- On peut aussi définir des espaces vectoriels avec des scalaires $c \in \mathbb{C}$
- Les 2+8 propriétés sont données ici avec la numérotation du livre

Les huit propriétés d'un espace vectoriel V

2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
3. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
4. V contient un vecteur $\mathbf{0}$ unique tel que $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
5. V contient un vecteur $-\mathbf{u}$ unique tel que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
10. $1 \times \mathbf{u} = \mathbf{u}$
9. $(c_1 c_2)\mathbf{u} = c_1(c_2\mathbf{u})$
7. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$
8. $(c_1 + c_2)\mathbf{u} = c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{u}$

(avec $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ et c_1, c_2, c des scalaires)

Exemples d'espaces vectoriels

- *L'espace* $\mathbb{R}^n$ est formé de tous les vecteurs colonnes $\mathbf{v}$ à n composantes réelles
- *Espace* $\mathbb{C}^n$: les composantes de $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ sont des nombres complexes
- $\mathbb{M}^n$: matrices réelles $n \times n$
- $\mathbb{F}$: fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$: $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ avec $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- $\mathbb{P}_n$: polynômes de degré $\leq n$
- $\mathbb{Z} = \{\mathbf{0}\}$: vecteur zéro uniquement

Espaces de vecteurs

Sous-espaces vectoriels

Noyau et image

Bases et dimension

La dimension des quatre sous-espaces

Changements de base

Sous-espaces vectoriels (sev)

Un *sous-espace* d'un espace vectoriel V est un sous-ensemble W de vecteurs de V qui satisfait à trois exigences :

1. $\mathbf{0} \in W$

et si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont des vecteurs du sous-espace $W \subseteq V$ et si $c \in \mathbb{R}$ alors :

2. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ appartient à W (fermeture sous l'addition)
3. $c\mathbf{u}$ appartient à W (fermeture sous la multiplication par un scalaire)

on peut montrer 2. et 3. directement avec l'étude de $c\mathbf{u} + d\mathbf{v}$

Remarques

1. Par définition, un sev W contient toutes les combinaisons linéaires de vecteurs provenant de W

Remarques

1. Par définition, un sev W contient toutes les combinaisons linéaires de vecteurs provenant de W
2. Réciproquement, si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ sont des vecteurs de l'espace vectoriel V alors l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de ces vecteurs est un sev de V

Remarques

1. Par définition, un sev W contient toutes les combinaisons linéaires de vecteurs provenant de W
2. Réciproquement, si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ sont des vecteurs de l'espace vectoriel V alors l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de ces vecteurs est un sev de V
   Ce sous-espace est appelé le *sous-espace engendré* par les vecteurs $\mathbf{v}_j$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et est noté $\mathrm{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$

Remarques

1. Par définition, un sev W contient toutes les combinaisons linéaires de vecteurs provenant de W
2. Réciproquement, si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ sont des vecteurs de l'espace vectoriel V alors l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de ces vecteurs est un sev de V
   Ce sous-espace est appelé le *sous-espace engendré* par les vecteurs $\mathbf{v}_j$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et est noté $\mathrm{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$
3. Si V est un espace vectoriel alors V lui-même et $\mathbb{Z} = \{\mathbf{0}\}$ sont des sev de V. On les appelle les *sous-espaces triviaux*

Remarques

1. Par définition, un sev W contient toutes les combinaisons linéaires de vecteurs provenant de W
2. Réciproquement, si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ sont des vecteurs de l'espace vectoriel V alors l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de ces vecteurs est un sev de V
   Ce sous-espace est appelé le *sous-espace engendré* par les vecteurs $\mathbf{v}_j$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et est noté $\mathrm{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$
3. Si V est un espace vectoriel alors V lui-même et $\mathbb{Z} = \{\mathbf{0}\}$ sont des sev de V. On les appelle les *sous-espaces triviaux*
4. Un sev est un espace vectoriel

Exemples de sev

- Un plan dans $\mathbb{R}^3$ qui passe par l'origine

  (un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ de *dimension* $n-1$ est appelé un *hyperplan*)

- Une droite dans $\mathbb{R}^3$ qui passe par l'origine

- Deux sous-espaces de $\mathbb{M}^n$, l'ensemble des matrices $n \times n$:
  - Toutes les matrices triangulaires supérieures de taille $n \times n$
  - Toutes les matrices diagonales de taille $n \times n$

Espaces de vecteurs

Sous-espaces vectoriels

Noyau et image

Bases et dimension

La dimension des quatre sous-espaces

Changements de base

Noyau (rappel)

Le *noyau* d'une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est l'ensemble des vecteurs qui sont solutions au SÉL $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. On le note $N(\mathbf{A})$ ou $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$:

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

C'est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$

Image

- L'*image* (ou l'espace des colonnes) de

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \ldots \ \mathbf{a}_n] \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

  est constituée de toutes les combinaisons linéaires des colonnes de $\mathbf{A}$ (vues comme des vecteurs)

- Ce sont tous les vecteurs $\mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ possibles, avec $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- Elle est notée $\mathrm{Im}(\mathbf{A})$ ou $C(\mathbf{A})$. C'est un sous-espace de $\mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(\mathbf{A}) &= \{\mathbf{A}\mathbf{x} \text{ pour tout } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} \\
&= \{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \text{ tel qu'il existe } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ avec } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\} \\
&= \mathrm{Vect}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\} \\
&\subseteq \mathbb{R}^m
\end{aligned}$$

Image : Propriété fondamentale pour les SÉLs

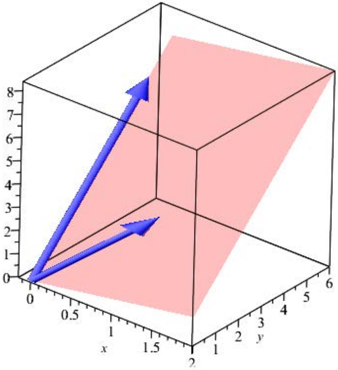
Le SÉL $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ possède (*au moins*) une solution

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mathbf{b} \in \mathrm{Im}(\mathbf{A})$$

Exemple

L'image de la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ est représentée par un plan dans l'espace :



Exercice 1

Décrire l'image des trois matrices suivantes :

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Espaces de vecteurs

Sous-espaces vectoriels

Noyau et image

Bases et dimension

La dimension des quatre sous-espaces

Changements de base

Ensemble générateur et base

Rappel

Un ensemble de vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *engendre* (ou *génère*) un espace vectoriel V si tout vecteur de V est combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{v}_i$ avec $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Ceci est noté $V = \mathrm{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$

Définition

Un ensemble de vecteurs $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ est une *base* d'un espace vectoriel V si

1. les vecteurs $\mathbf{v}_i$ sont linéairement indépendants

   et

2. $V = \mathrm{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$

Théorème de la base extraite

Soit $V = \mathrm{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ avec $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un ensemble dépendant de vecteurs

- Il existe $\mathbf{v}_k$ qui est combinaison linéaire des autres vecteurs, avec $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, et les autres vecteurs génèrent toujours V :

$$\mathrm{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\} = V$$

- Si $n > 1$, alors il existe un sous-ensemble (strict) de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ qui forme une base de V

Bases et colonnes de A

- Les colonnes d'une matrice génèrent son image
- Pour une matrice $\mathbf{A}$ de taille $n \times n$ qui est inversible :
  - Les colonnes sont linéairement indépendantes
  - $\mathrm{Im}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^n$

  Autrement dit, les colonnes de $\mathbf{A}$ forment une base de $\mathbb{R}^n$
- Pour une matrice $\mathbf{A}$ de taille $m \times n$:
  - Les colonnes ne sont pas nécessairement linéairement indépendantes
  - Les colonnes pivots forment une base de $\mathrm{Im}(\mathbf{A})$

Lien avec un SÉL

Théorème

- n vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^n$ engendrent $\mathbb{R}^n$
- n vecteurs qui engendrent $\mathbb{R}^n$ sont nécessairement linéairement indépendants

Ce théorème peut être reformulé comme suit en termes de SÉL :

- Si les colonnes d'une matrice $\mathbf{A}$ de taille $n \times n$ sont linéairement indépendantes, alors :
  - elles engendrent $\mathbb{R}^n$
  - elles forment une base de $\mathbb{R}^n$
  - $\mathrm{Im}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^n$
  - $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ possède une solution unique

Dimension

Théorème

Si les vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ forment une base de l'espace vectoriel V, alors tout vecteur de V s'écrit de façon **unique** comme combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{v}_i$ avec $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

Théorème

Si $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ et $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_q\}$ sont deux bases d'un espace vectoriel donné alors $p = q$

Autrement dit, toute base d'un espace vectoriel contient le même nombre de vecteurs

Définition

La *dimension* d'un espace vectoriel V est le nombre de vecteurs dans une base de V. On la note $\dim(V)$ ou $\dim V$

Autres théorèmes

Théorème

Tout ensemble de strictement plus de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n est nécessairement dépendant

Théorème de la base incomplète

Soit W un sev de V avec $\dim(V) = n$ (dimension finie). Alors

- tout ensemble de vecteurs indépendants de W peut être complété pour former une base de W
- $\dim(W) \leq \dim(V)$

Dimension finie vs infinie

Un espace vectoriel est de dimension finie s'il possède un ensemble générateur de cardinalité finie. Sinon, il est de dimension infinie

Exemple : $\mathbb{P}_n$ vs $\mathbb{P}$ (l'ensemble de tous les polynômes)

Espace $\mathbb{Z}$

- L'espace $\mathbb{Z} = \{\mathbf{0}\}$ est de dimension 0
- La seule base de $\mathbb{Z}$ est l'ensemble vide $\emptyset$
- Le vecteur nul $\mathbf{0}$ ne peut pas faire partie d'une base car l'indépendance linéaire serait alors perdue

Exercice 2

Trouver trois vecteurs indépendants dans l'hyperplan $x + 2y - 3z - t = 0$ de $\mathbb{R}^4$. Pourquoi ne peut-on en trouver quatre ? De quelle matrice cet hyperplan est-il le noyau ?

Exercice 3

Trouver une base de $\mathbb{P}_3$, l'espace des polynômes $p(x)$ de degré ≤ 3. Donner une base du sev de $\mathbb{P}_3$ où $p(1) = 0$

Espaces de vecteurs

Sous-espaces vectoriels

Noyau et image

Bases et dimension

La dimension des quatre sous-espaces

Changements de base

Image de $\mathbf{A}$: $\mathrm{Im}(\mathbf{A}) = C(\mathbf{A})$

On considère une matrice $\mathbf{A}$ de taille $m \times n$ et $\mathbf{R}$ sa forme échelonnée réduite. Soit $r = r(\mathbf{A})$

1. C'est le sous-espace de $\mathbb{R}^m$ engendré par les colonnes de $\mathbf{A}$
2. En général, $\mathrm{Im}(\mathbf{A}) \neq \mathrm{Im}(\mathbf{R})$
3. Les r colonnes pivots de $\mathbf{A}$ forment une base de $\mathrm{Im}(\mathbf{A})$
4. La dimension de $\mathrm{Im}(\mathbf{A})$ et de $\mathrm{Im}(\mathbf{R})$ est égale au rang r de $\mathbf{A}$:
$$\dim \mathrm{Im}(\mathbf{A}) = \dim \mathrm{Im}(\mathbf{R}) = r$$

Espace des lignes de $\mathbf{A}$: $\mathrm{Im}(\mathbf{A}^\top) = C(\mathbf{A}^\top) = \mathrm{Lgn}(\mathbf{A})$

On considère une matrice $\mathbf{A}$ de taille $m \times n$ et $\mathbf{R}$ sa forme échelonnée réduite. Soit $r = r(\mathbf{A})$

1. L'*espace des lignes de* $\mathbf{A}$, noté $\mathrm{Im}(\mathbf{A}^\top)$, est le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par les lignes de $\mathbf{A}$
2. $\mathbf{A}$ et $\mathbf{R}$ ont le même espace des lignes : $\mathrm{Im}(\mathbf{A}^\top) = \mathrm{Im}(\mathbf{R}^\top)$
3. Les lignes pivots de $\mathbf{R}$ et les lignes pivots de $\mathbf{A}$ forment deux bases de $\mathrm{Im}(\mathbf{A}^\top)$
4. La dimension de $\mathrm{Im}(\mathbf{A}^\top)$ et de $\mathrm{Im}(\mathbf{R}^\top)$ est égale au rang r de $\mathbf{A}$:
$$\dim \mathrm{Im}(\mathbf{A}^\top) = \dim \mathrm{Im}(\mathbf{R}^\top) = r$$

Noyau de A : $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = N(\mathbf{A})$

On considère une matrice $\mathbf{A}$ de taille $m \times n$ et $\mathbf{R}$ sa forme échelonnée réduite. Soit $r = r(\mathbf{A})$

1. C'est le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ constitué des vecteurs $\mathbf{x}$ tels que $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$
2. $\mathbf{A}$ et $\mathbf{R}$ ont le même noyau : $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = \mathrm{Ker}(\mathbf{R})$
3. Les solutions spéciales forment une base de $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ et de $\mathrm{Ker}(\mathbf{R})$
4. On a

$$\dim \mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = \dim \mathrm{Ker}(\mathbf{R}) = n - r$$

Noyau à gauche de $\mathbf{A}$: $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}^\top) = N(\mathbf{A}^\top)$

On considère une matrice $\mathbf{A}$ de taille $m \times n$ et $\mathbf{R}$ sa forme échelonnée réduite. Soit $r = r(\mathbf{A})$

1. Le *noyau à gauche de* $\mathbf{A}$, noté $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}^\top)$, est le sous-espace de $\mathbb{R}^m$ constitué des vecteurs $\mathbf{y}$ tels que $\mathbf{A}^\top\mathbf{y} = \mathbf{0}$
2. On a

$$\dim \mathrm{Ker}(\mathbf{A}^\top) = m - r$$

Dimensions des quatre sous-espaces

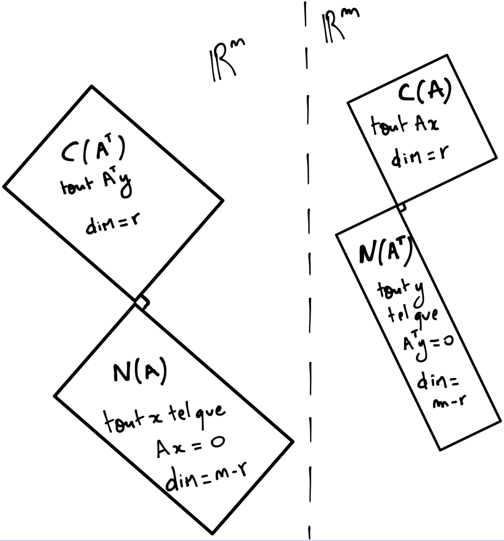
$$\begin{array}{llll}
\mathrm{Im}(\mathbf{A}) & \text{sous-espace de } \mathbb{R}^m & \text{et } \dim \mathrm{Im}(\mathbf{A}) & = r \\
\mathrm{Im}(\mathbf{A}^\top) & \text{sous-espace de } \mathbb{R}^n & \text{et } \dim \mathrm{Im}(\mathbf{A}^\top) & = r \\
\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) & \text{sous-espace de } \mathbb{R}^n & \text{et } \dim \mathrm{Ker}(\mathbf{A}) & = n - r \\
\mathrm{Ker}(\mathbf{A}^\top) & \text{sous-espace de } \mathbb{R}^m & \text{et } \dim \mathrm{Ker}(\mathbf{A}^\top) & = m - r
\end{array}$$

Théorème

Pour toute matrice $\mathbf{A}$ de taille $m \times n$ on a :

1. $\dim \mathrm{Im}(\mathbf{A}^\top) + \dim \mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = n$ **théorème du rang**
2. $\dim \mathrm{Im}(\mathbf{A}) + \dim \mathrm{Ker}(\mathbf{A}^\top) = m$

Portrait global



Exercice 4

Illustrer les différents concepts sur

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Espaces de vecteurs

Sous-espaces vectoriels

Noyau et image

Bases et dimension

La dimension des quatre sous-espaces

Changements de base

Introduction, notations, exemple

- Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de l'espace vectoriel V de dimension n. Un vecteur $\mathbf{x} \in V$ peut s'écrire $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ ou $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$

- **Exemple avec $n = 2$:**
  Avec
  $$\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = ((1,1),(0,2)) \subseteq \mathbb{R}^2$$
  et
  $$\mathcal{C} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) = ((-1,3),(1,12)) \subseteq \mathbb{R}^2$$
  on aura
  $$\mathbf{x} = (5,6) = 5\mathbf{b}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{b}_2 = -\frac{54}{15}\mathbf{c}_1 + \frac{21}{15}\mathbf{c}_2 \in \mathbb{R}^2$$
  et on note $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \left(5, \frac{1}{2}\right) \in \mathbb{R}^2$ et $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = \frac{1}{15}(-54, 21) \in \mathbb{R}^2$

Changement de base : Sur l'exemple

- Contexte :
  - On a le vecteur $\mathbf{x}$ exprimé dans la base $\mathcal{B}$
  - Si on se donne une nouvelle base $\mathcal{C}$, alors on veut exprimer $\mathbf{x}$ dans cette base : $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} \to [\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$

- Ce changement peut se faire à condition de pouvoir exprimer les vecteurs de $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{C}$:
$$\mathbf{b}_1 = -\frac{11}{15}\mathbf{c}_1 + \frac{4}{15}\mathbf{c}_2 \text{ et } \mathbf{b}_2 = \frac{2}{15}\mathbf{c}_1 + \frac{2}{15}\mathbf{c}_2$$

- $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = \left[5\mathbf{b}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{b}_2\right]_{\mathcal{C}} = 5[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} + \frac{1}{2}[\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} = \left[[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}}\ [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}}\right]\begin{bmatrix} 5 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
$= \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -11 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathbf{P}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -54 \\ 21 \end{bmatrix}$

Changement de base : Cas général

Soient $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)$ et $\mathcal{C} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n)$ deux bases de V de dimension n

- $[\mathbf{x}]_\mathcal{C} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathbf{P}}[\mathbf{x}]_\mathcal{B} \in \mathbb{R}^n$
- $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathbf{P}} = \left[[\mathbf{b}_1]_\mathcal{C}\ [\mathbf{b}_2]_\mathcal{C}\ \ldots\ [\mathbf{b}_n]_\mathcal{C}\right] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est la matrice de changement de base (de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$), définie de manière unique[1] et inversible
- $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathbf{P}}^{-1} = \underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{\mathbf{P}} = \left[[\mathbf{c}_1]_\mathcal{B}\ [\mathbf{c}_2]_\mathcal{B}\ \ldots\ [\mathbf{c}_n]_\mathcal{B}\right]$
- Si $\mathcal{C} = \mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$, alors $[\mathbf{b}_i]_\mathcal{C} = [\mathbf{b}_i]_\mathcal{E} = \mathbf{b}_i$ pour $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et

$$\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathbf{P}} = \underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathbf{P}} = \mathbf{P}_\mathcal{B} = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \ldots\ \mathbf{b}_n]$$

1. si on utilise les parenthèses pour lister les vecteur d'une base

Calcul de la matrice de changement de base

- $[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}}$ est la solution du SÉL :

$$[\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2\ \dots\ \mathbf{c}_n][\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} = \mathbf{b}_1$$

- Comme

$$\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathbf{P}} = \left[[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}}\ [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}}\ \dots\ [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}}\right]$$

- On considère le système augmenté

$$\left[\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2\ \dots\ \mathbf{c}_n\ \mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \dots\ \mathbf{b}_n\right] \sim \left[\mathbf{I}\ \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathbf{P}}\right]$$

Exercice 5

Soient les bases $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ et $\mathcal{C} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$ de $\mathbb{R}^2$, avec $\mathbf{b}_1 = (1, -3)$, $\mathbf{b}_2 = (-2, 4)$, et $\mathbf{c}_1 = (-7, 9)$, $\mathbf{c}_2 = (-5, 7)$

Montrer que

$$\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 2 & -3/2 \\ -3 & 5/2 \end{bmatrix}$$

et

$$\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$