

MTH1008 — Algèbre linéaire appliquée

Série 5 : Espaces de vecteurs, bases et dimension

Exercices (énoncés)

Les numéros renvoient au manuel [alfa](#) (série d'exercices.numéro).

Exercice 5.3 (★)

Pour chaque couple de famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p)$ et d'espace vectoriel V ci-dessous, la famille forme-t-elle une base de V ? Dans tous les cas, donner une famille distincte qui forme une base de V .

- $V = \mathbb{R}^2$ et la famille $((1, 2), (3, 4))$.
- $V = \mathbb{R}^3$ et la famille $((1, 2), (3, 4), (5, 6))$.
- $V = \mathbb{R}^2$ et la famille $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.
- $V = \mathbb{R}^4$ et la famille $((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$.
- $V = \mathbb{R}^3$ et la famille $((1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$.

Exercice 5.4 (★)

Des couples d'ensembles (V, W) sont proposés ci-dessous, dans lesquels V est un espace vectoriel. Pour chacun, indiquer et justifier si W est un sous-espace vectoriel de V .

- $V = \mathbb{R}^2$ et W est le disque de rayon 1 centré en l'origine.
- $V = \mathbb{R}^3$ et W est un cube dont les côtés sont de longueur 1.
- $V = \mathbb{R}^2$ et W est la droite d'équation $x_2 = x_1$.
- $V = \mathbb{R}^{m \times n}$ et $W = \mathbb{R}^{n \times n}$, pour tout $m, n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5.5 (★)

Déterminer si chacun des ensembles suivants est un espace vectoriel.

- $V = \{x \in \mathbb{R}^3 : 8x_1 - 5x_3 = 8 - 2x_2\}$.
- $V = \text{Vect}((1, 1), (-1, 1))$.
- $V = \{x \in \mathbb{R}^4 : 3x_1 - x_2 = x_3, 2x_2 = 3x_3 - x_4\}$.
- $V = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0\}$.

Exercice 5.6 (★★)

Soient E un espace vectoriel et F et G des sous-espaces vectoriels de E . Montrer que :

- $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E ;

2. $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E .

Exercice 5.7 espace des matrices (**)

Montrer que $\mathbb{R}^{m \times n}$, l'ensemble des matrices réelles de taille $m \times n$, est un espace vectoriel.

Exercice 5.8 ensemble des suites bornées (**)

Soit S l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles. Soit E l'ensemble des suites de S bornées en valeur absolue, c'est-à-dire telles qu'il existe une constante strictement positive K supérieure à toutes les valeurs prises par la suite en valeur absolue :

$$E = \{u_n \in S, \exists K > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq K\}. \quad (1)$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de S .

Exercice 5.10 espace des fonctions continues (**)

Montrer que l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle est un espace vectoriel.

Exercice 5.11 espace des fonctions bornées (**)

Montrer que l'ensemble des fonctions bornées sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.

Exercice 5.12 espace de polynômes 2 (*)

Montrer que $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à deux, est un espace vectoriel.

Exercice 5.13 (*)

Déterminer si $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5.14 espace de polynômes 1 (*)

Montrer que $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à deux, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Exercice 5.15 (***)

La base canonique de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ a été définie à la définition « base canonique des polynômes ». On considère V l'ensemble des polynômes de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ tels que $p(1) = 0$.

1. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Donner une base de V .

Exercice 5.16 (★)

Montrer que $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$, l'ensemble des vecteurs du premier quadrant de $\mathbb{R}^2$, n'est pas un espace vectoriel.

Exercice 5.17 changement de base 1 (★)

Soit V un plan de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$V = \text{Vect}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$$

avec $\mathbf{b}_1 = (1, 1, 0)$ et $\mathbf{b}_2 = (1, 0, 2)$ tels que $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ est une base de V . On pose $\mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_1$ et $\mathbf{c}_2 = (1, -1, 4)$.

1. Montrer que $\mathcal{C} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$ est une base de V .
2. Donner $\mathbf{P}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.
3. Soit $\mathbf{x} = (2, 1, 2)$. Donner les coordonnées de $\mathbf{x}$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
4. Soit $\mathbf{y} = (1, 1, 1)$. Donner les coordonnées de $\mathbf{y}$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Exercice 5.18 changement de base dans $\mathbb{C}^3$ (★★)

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$ défini par

$$V = \text{Vect}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \subseteq \mathbb{C}^3$$

avec $\mathbf{b}_1 = (1, 1 - i, 2)$ et $\mathbf{b}_2 = (1, 0, 5i)$. On pose $\mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_1$ et $\mathbf{c}_2 = \mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_1$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ est une base de V .
2. Montrer que $\mathcal{C} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$ est une base de V .
3. Donner $\mathbf{P}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.
4. Soit $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = (1, i)$. Donner les coordonnées de $\mathbf{x}$ dans la base euclidienne $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de $\mathbb{C}^3$ et dans la base $\mathcal{B}$ de V .

Exercice 5.19 changement de base 2 (★)

Soient $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ et $\mathcal{C} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$ deux bases de $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbf{b}_1 = (1, -3)$, $\mathbf{b}_2 = (-2, 4)$, $\mathbf{c}_1 = (-7, 9)$, et $\mathbf{c}_2 = (-5, 7)$. Montrer que $\mathbf{P}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -3/2 \\ -3 & 5/2 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{P}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$.

Exercice 5.20 changement de base 3 (★★)

Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^3$ avec $\mathbf{b}_1 = (2, 3, -1)$, $\mathbf{b}_2 = (0, 1, 1)$ et $\mathbf{b}_3 = (0, 0, 3)$. Donner $\mathcal{C}$, la base de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\mathbf{P}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Exercice 5.23 (★)

Montrer que l'ensemble des matrices inversibles n'est pas un espace vectoriel.

Exercice 5.27 $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ (★★)

1. Trouver une base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ l'espace des polynômes de degré au plus trois.
2. Donner une base du sous-espace de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ où $p(1) = 0$.

Exercice 5.30 les deux définitions de la dépendance (★★★)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Une famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p)$ de vecteurs d'un espace vectoriel est dite *liée* si l'un de ses vecteurs peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des $p - 1$ autres. Mais ce cours donne la définition suivante : cette même famille est liée si et seulement si le système d'équations formé par

$$x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 + \dots + x_p \mathbf{u}_p = \mathbf{0}$$

admet une autre solution que la solution triviale

$$x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0.$$

Montrer que ces deux définitions sont bien équivalentes.

Exercice 5.32 (★★)

Soient V un espace vectoriel et $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p)$ une famille libre de V . Montrer que la famille extraite $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_p)$ est également une famille libre de V .

Exercice 5.43 (★★)

1. Soit

$$S = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^3.$$

Déterminer $S^\perp$ et donner une base de $S^\perp$.

Exercice 5.44 (★★)

1. Soit

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}.$$

Déterminer $P^\perp$ et une base associée.

Exercice 5.45 (★★)

1. Dans $\mathbb{R}^2$, soit

$$L = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Trouver $L^\perp$ et une base associée.

Exercice 6.3 (★)

Donner une matrice $\mathbf{A}$ telle que $\text{Im}(\mathbf{A})$ est égale à

$$\{(-3a, 5c - 6b, a + b + c, a - c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 6.10 (★)

On considère la matrice

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}.$$

1. Déterminer un ensemble générateur de $\text{Im}(\mathbf{B})$, puis en extraire une base.
2. Calculer $\text{rg}(\mathbf{B})$.
3. En utilisant le théorème du rang, déterminer $\dim(\text{Ker}(\mathbf{B}))$.

Exercice 6.11 (★)

Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 2}.$$

1. Montrer que les colonnes de $\mathbf{A}$ sont linéairement dépendantes.
2. En déduire une base de $\text{Im}(\mathbf{A})$ et sa dimension.
3. Utiliser le théorème du rang pour calculer $\dim(\text{Ker}(\mathbf{A}))$.

Exercice 6.12 (★★)

1. Soit $\mathbf{A}$ de taille $m \times n$ dont la somme des colonnes est égale au vecteur nul de $\mathbb{R}^m$.
Donner un vecteur de $\text{Ker}(\mathbf{A})$.

2. Notons $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$. Donner une base de $\text{Ker}(\mathbf{A})$. En déduire le rang de $\mathbf{A}$.

3. Donner une base de $\text{Im}(\mathbf{A}^\top)$. En déduire la dimension de $\text{Ker}(\mathbf{A}^\top)$.

Exercice 6.16 (★)

1. Déterminer le rang de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

puis la dimension de $\text{Ker}(\mathbf{A})$ et vérifier que

$$\dim \text{Im}(\mathbf{A}) + \dim \text{Ker}(\mathbf{A}) = 3.$$

Exercice 6.17 (★)

1. Pour

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

déterminer le rang, une base de $\text{Im}(\mathbf{A})$ et de $\text{Ker}(\mathbf{A})$, puis vérifier le théorème du rang.

Exercice 6.20 (★)

Donner une base de chacun des quatre espaces fondamentaux et vérifier le théorème du rang pour

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Exercice 6.21 noyaux de produits de matrices (★)

Soient $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ deux matrices carrées.

1. Est-il toujours vrai que $\text{Ker}(\mathbf{B}) \subseteq \text{Ker}(\mathbf{AB})$? Si c'est vrai, démontrer-le, sinon donner un contre-exemple.
2. Montrer que si $\mathbf{A}$ est inversible, alors $\text{Ker}(\mathbf{AB}) = \text{Ker}(\mathbf{B})$.
3. Donner un exemple de matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ telles que $\text{Ker}(\mathbf{AB}) \not\subseteq \text{Ker}(\mathbf{B})$.

Exercice 6.22 image de produits de matrices carrées (★)

Soient $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ deux matrices carrées.

1. Montrer que $\text{Im}(\mathbf{AB}) \subseteq \text{Im}(\mathbf{A})$.

2. Est-il toujours vrai que $\text{Im}(\mathbf{A}) \subseteq \text{Im}(\mathbf{AB})$? Justifier par un raisonnement ou un contre-exemple.
3. Montrer que si $\mathbf{B}$ est inversible, alors $\text{Im}(\mathbf{AB}) = \text{Im}(\mathbf{A})$.

Exercice 6.23 image de $\mathbf{AA}^\top$ ()**

Soient $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, l'objectif est de montrer pas à pas que

$$\text{Im}(\mathbf{AA}^\top) = \text{Im}(\mathbf{A}) .$$

1. Montrer que $\text{Im}(\mathbf{AA}^\top) \subseteq \text{Im}(\mathbf{A})$.
2. Dans cette question on souhaite montrer l'inclusion réciproque $\text{Im}(\mathbf{A}) \subseteq \text{Im}(\mathbf{AA}^\top)$.
 - (a) Soit $\mathbf{y} \in \text{Im}(\mathbf{A})$, montrer qu'il existe $\mathbf{x}_1 \in \text{Ker}(\mathbf{A})$ et $\mathbf{x}_2 \in \text{Im}(\mathbf{A}^\top)$, tels que $\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$.
 - (b) En déduire que $\mathbf{y} \in \text{Im}(\mathbf{AA}^\top)$ et finalement que $\text{Im}(\mathbf{AA}^\top) = \text{Im}(\mathbf{A})$.

Exercice 6.24 noyau de $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ ()**

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. L'objectif est de montrer pas à pas que

$$\text{Ker}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A}) = \text{Ker}(\mathbf{A}) .$$

1. Montrer l'inclusion $\text{Ker}(\mathbf{A}) \subseteq \text{Ker}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})$.
2. Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Montrer l'égalité scalaire

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = \|\mathbf{Ax}\|_2^2 .$$

3. Conclure que $\text{Ker}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A}) = \text{Ker}(\mathbf{A})$.