# 4. Factorisation LU et déterminant

MTH1008

Sébastien Le Digabel
Polytechnique Montréal

H2024

2024-01-19

v2

# Plan

# Liens avec le livre et exercices suggérés

| | | |
|---|---|---|
| 2.5 | Factorisations matricielles | 1, 3, 6, 7, 9, 15, 21, 23, 24, 25 |
| 3.1 | Introduction aux déterminants | 1, 3, 59, 13, 15, 21, 23, 24, 25<br>26, 29, 31, 38, 41 |
| 3.2 | Propriétés des déterminants | 1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 18, 20, 24<br>26, 27, 31, 33, 35, 39, 41 |

## Factorisation LU

## Factorisations LDU, LDLT, et PA=LU

## Déterminant

# Factorisation (ou décomposition) LU (1/2)

Étant donnée $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, l'élimination **sans permutation** permet d'écrire

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

où

- $\mathbf{U}$ est la matrice échelonnée obtenue par élimination
- $\mathbf{L} = (\mathbf{E}_p \mathbf{E}_{p-1} \cdots \mathbf{E}_1)^{-1} = \mathbf{E}_1^{-1} \cdots \mathbf{E}_{p-1}^{-1} \mathbf{E}_p^{-1}$ est le produit des inverses des matrices d'élimination. Cette matrice est triangulaire inférieure

Ceci est **une** *factorisation* (ou *décomposition*) LU de la matrice $\mathbf{A}$

# Factorisation LU (2/2)

On remarque que :

- $\mathbf{L}$ est triangulaire inférieure
- $\mathbf{L}$ possède des $1$ sur sa diagonale
- $\mathbf{L}$ est dite triangulaire inférieure *unipotente*
- Chaque multiplicateur $\ell_{ij}$ est à sa position $(i, j)$ dans $\mathbf{L}$ :

$$\mathbf{L}(i, j) = \ell_{ij}$$

- $\mathbf{U}$ est échelonnée (ou triangulaire supérieure si $m = n$)

# Exemple 1

Effectuer la décomposition LU de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

# Cas particuliers

- Lorsqu'une ligne de $\mathbf{A}$ débute avec des zéros, il en est de même pour cette ligne de $\mathbf{L}$

- Lorsqu'une colonne de $\mathbf{A}$ débute avec des zéros, il en est de même pour cette colonne de $\mathbf{U}$

# Résolution d'un SÉL

**Un système carré = deux systèmes triangulaires**

Pour résoudre un SÉL carré $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ :

1. Factoriser $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$
2. Résoudre $\mathbf{LUx} = \mathbf{b}$ via deux systèmes triangulaires :
   - 2.1 Résoudre $\mathbf{Lc} = \mathbf{b}$ par descente triangulaire
   - 2.2 Résoudre $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$ par remontée triangulaire

La solution au SÉL est le $\mathbf{x}$ trouvé à l'étape 2.2

# Exemple 2

En utilisant la décomposition LU, résoudre le système $3 \times 3$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & + & 9x_2 & - & 3x_3 & = & 8 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 10 \end{array}\right.$$

# Complexité

- L'élimination sur $\mathbf{A}$ nécessite environ $n^3/3$ multiplications et $n^3/3$ soustractions : Complexité de $\mathcal{O}(n^3)$
- La résolution pour chaque membre de droite nécessite $n^2$ multiplications et $n^2$ soustractions : Complexité de $\mathcal{O}(n^2)$
- Résoudre un SÉL se fait donc en $\mathcal{O}(n^3)$

Factorisation LU

## Factorisations LDU, LDLT, et PA=LU

Déterminant

# Factorisation LDU

Pour une matrice de taille $3 \times 3$, si $d_1, d_2, d_3$ sont les pivots sur la diagonale de $\mathbf{U}$ dans la factorisation LU et

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$$

alors en divisant les lignes de $\mathbf{U}$ par les pivots on obtient

$$\begin{array}{ccccc} \begin{bmatrix} d_1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & d_2 & u_{23} \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} & \times & \begin{bmatrix} 1 & u_{12}/d_1 & u_{13}/d_1 \\ 0 & 1 & u_{23}/d_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{U} & = & \mathbf{D} & \times & \mathbf{U}' \end{array}$$

Ainsi, $\mathbf{A} = \mathbf{LU} = \mathbf{LDU}'$. Ceci est la factorisation LDU de $\mathbf{A}$

# Factorisation LDLT

- Si $\mathbf{A}$ est **symétrique** et se factorise en $\mathbf{A} = \mathbf{LDU}$ alors $\mathbf{U} = \mathbf{L}^\top$ et

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top = (\mathbf{LDU})^\top = \mathbf{U}^\top\mathbf{D}\mathbf{L}^\top = \mathbf{LDL}^\top$$

  Ceci est la factorisation LDLT de $\mathbf{A}$

- **Exemple 3 :** Illustrer sur $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$

# Factorisation $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$

- Quand $\mathbf{A}^{-1}$ existe, si un 0 apparaît à la place d'un pivot alors on peut obtenir un pivot non-nul en interchangeant deux lignes à l'aide d'une matrice de permutation
- L'ensemble des permutations nécessaires à l'élimination peut être rassemblé en **une** matrice de permutation $\mathbf{P}$
- Il existe donc une matrice de permutation $\mathbf{P}$ telle que la procédure d'élimination fonctionne pour la matrice $\mathbf{PA}$

On obtient la factorisation suivante de $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$$

# Exemple 4

Donner deux décompositions $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$ pour $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{bmatrix}$

Factorisation LU

Factorisations LDU, LDLT, et PA=LU

## Déterminant

# Rappel : Matrice inverse $2 \times 2$

Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et $ad - cb \neq 0$, alors $\mathbf{A}^{-1}$ existe et

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$ad - bc$ est appelé le *déterminant* de $\mathbf{A}$, noté

$$\det(\mathbf{A}) = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

# Déterminant des matrices $2 \times 2$ et $3 \times 3$

- $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

- $$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= aei + dhc + gbf - gec - ahf - dbi \\ &= a(ei - hf) - b(di - gf) + c(dh - ge) \\ &= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \end{aligned}$$

# Déterminant des matrices $n \times n$ pour $n \geq 2$

avec $\mathbf{A}_{ij}$ la sous-matrice de $\mathbf{A}$ obtenue en supprimant la $i$ème ligne et la $j$ème colonne de $\mathbf{A}$ et $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ij})$ :

- Développement suivant la première ligne de $\mathbf{A}$ :

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(\mathbf{A}_{1j}) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} c_{1j}$$

- Développement suivant la ligne $i$ de $\mathbf{A}$ :

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{ij}$$

- Développement suivant la colonne $j$ de $\mathbf{A}$ :

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} c_{ij}$$

# Exemple 5

$$\text{Montrer que } \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 3 & -7 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -12$$

# Propriétés

- Le déterminant n'est défini que pour des matrices carrées
- $\mathbf{A}$ inversible $\Leftrightarrow \det(\mathbf{A}) \neq 0$
- Déterminant $= \pm$ produit des pivots
  $=$ produit des valeurs propres
- Si $\mathbf{A}$ triangulaire : Déterminant $=$ produit des éléments diagonaux
- $\det(\mathbf{A}^\top) = \det(\mathbf{A})$
- $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$

# Opérations

- Élimination : $\det(\mathbf{E}_{ij}\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})$ car $\det(\mathbf{E}_{ij}) = 1$
- Permutation : $\det(\mathbf{P}_{ij}\mathbf{A}) = -\det(\mathbf{A})$ car $\det(\mathbf{P}_{ij}) = -1$ (si $i \neq j$)
- Multiplication des lignes par des scalaires :
  $\det(\mathbf{DA}) = \left(\prod_{i=1}^{n} \mathbf{D}(i,i)\right) \det(\mathbf{A})$ avec $\mathbf{D}$ diagonale

# Règle de Cramer pour la résolution d'un SÉL

Soit le SÉL $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ avec $\mathbf{A}$ inversible. La solution $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est donnée, pour $j = 1, 2, \ldots, n$, par

$$x_j = \frac{\det(\mathbf{A}_j)}{\det(\mathbf{A})}$$

avec

$$\mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{b} & \mathbf{a}_{j+1} & \ldots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$$

(matrice formée en remplaçant la $j$ème colonne de $\mathbf{A}$ par $\mathbf{b}$)