

MTH1008 — Algèbre linéaire appliquée

Série 4 : Factorisation LU et déterminant

Exercices (énoncés)

Les numéros renvoient au manuel [alfa](#) (série d'exercices.numéro).

Exercice 8.6 (★)

Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ -2 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer $\det(\mathbf{A})$.
2. En admettant qu'une décomposition LU de $\mathbf{A}$ existe, telle que $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ où $\mathbf{L}$ est triangulaire inférieure avec des 1 sur sa diagonale et $\mathbf{U}$ est triangulaire supérieure, donner $\det(\mathbf{U})$ *sans calcul supplémentaire*.

Exercice 8.7 (★)

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$.

1. Donner une décomposition LU de $\mathbf{A}$.
2. Résoudre $\mathbf{Ax} = \mathbf{b} = (1, 1, 1)$ en résolvant d'abord $\mathbf{Lc} = \mathbf{b}$ puis $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$.

Exercice 8.8 (★)

Donner une autre décomposition LU de la matrice $\mathbf{A}$ de l'exercice 8.7.

Exercice 8.9 (★)

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Donner une décomposition LU de $\mathbf{A}$.
2. Résoudre $\mathbf{Ax} = \mathbf{b} = (2, 8, 10)$ en utilisant la décomposition LU de la question précédente.

Exercice 8.10 (*)

Soit $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ qui correspond à la matrice $\mathbf{A}$ donnée à l'exercice 8.9, sans sa

dernière colonne. En se basant sur la décomposition LU de la matrice A déjà obtenue à l'exercice 8.9, donner une décomposition LU de $\mathbf{B}$ sans aucun calcul supplémentaire.

Exercice 8.12 ()**

Soient a et b deux réels, considérons le système d'inconnues x_1, x_2, x_3, x_4 suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = a \\ 5x_1 + 12x_2 + 11x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 3x_4 = b \end{cases}$$

1. Écrire la matrice $\mathbf{A}$ des coefficients du système et en trouver une décomposition LU.
2. Résoudre le système à l'aide de cette décomposition. Écrire les solutions sous forme paramétrique vectorielle s'il y a lieu.

Exercice 8.22 ()**

Soit la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 & 2 \\ -2 & 5 & 13 & 2 \\ -3 & 18 & 42 & -5 \\ 4 & 14 & -21 & -11 \end{bmatrix}$

1. Effectuer une décomposition LU de $\mathbf{A}$.
2. En déduire le déterminant de $\mathbf{A}$.

Exercice 8.30 Factorisation LU d'une transposée (*)

Soit la matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ définie par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -7 \\ 2 & -2 & 9 \end{bmatrix}$$

dont une factorisation LU est donnée par

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Donner une factorisation LU de $\mathbf{A}^\top$.

2. Utiliser cette factorisation pour résoudre en deux étapes le système $\mathbf{A}^\top \mathbf{x} = \mathbf{b}$ avec

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 24 \end{bmatrix}.$$

Exercice 12.7 factorisation de Cholesky explicite (★★)

Soit la matrice réelle

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 13 & 23 \\ 4 & 23 & 77 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer qu'il existe une matrice triangulaire inférieure $\mathbf{L}$ à coefficients réels telle que $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$.
2. La factorisation $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$ est-elle unique ?
3. Déterminer explicitement une telle matrice $\mathbf{L}$ satisfaisant la factorisation.

Exercice 1.1 Vrai ou faux ? (★)

Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

1. Si $\mathbf{A}$ est une matrice carrée de taille $n \times n$ et si κ est un scalaire, alors $\det(\kappa\mathbf{A}) = \kappa \det(\mathbf{A})$.
2. Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont des matrices carrées de même taille, alors $\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$.
3. Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux matrices carrées d'au moins deux lignes et telles que $\mathbf{A} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \mathbf{B}$.
On a alors $\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$.

Exercice 1.18 (★)

Calculer les déterminants de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

et $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercice 1.19 (★★)

Trois opérations élémentaires sont effectuées sur une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dans l'ordre suivant :

1. La deuxième ligne de $\mathbf{A}$ est multipliée par $\alpha \in \mathbb{R}^*$;
2. La première et la deuxième ligne de $\mathbf{A}$ sont permutées ;
3. La troisième ligne est ajoutée trois fois à la première ligne de $\mathbf{A}$.

La matrice issue de ces trois transformations est notée $\mathbf{B}$. Donner le déterminant de $\mathbf{B}$ en fonction de celui de $\mathbf{A}$.

Exercice 1.20 (*)

Soient les matrices :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 & 2 \\ -2 & 5 & 13 & 2 \\ -3 & 18 & 42 & -5 \\ 4 & 14 & -21 & -11 \end{bmatrix}, \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -7 & 1 \end{bmatrix}, \text{ et } \mathbf{U} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Vérifier que $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$.
2. En déduire le déterminant de $\mathbf{A}$.

3. Utiliser cette information pour calculer le déterminant de $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & -13 & 2 \\ -6 & 18 & -42 & -5 \\ 8 & 14 & 21 & -11 \end{bmatrix}$.

Exercice 1.21 (**)

$$\text{Soit } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer $\det(\mathbf{A})$.
2. Est-ce que $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ est inversible ? Si oui, quel est le déterminant de $(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1}$?

Exercice 1.22 (***)

$$\text{Soit } \mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 4 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 4 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

1. Montrer que $\det(\mathbf{A}_{n+2}) = 4(\det(\mathbf{A}_{n+1}) - \det(\mathbf{A}_n))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire $\det(\mathbf{A}_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.23 (★★)

Soient $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, et $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

1. Soit la matrice diagonale par blocs définie par $\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$.

Montrer que $\det(\mathbf{M}_1) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{D})$.

2. Soit la matrice triangulaire par blocs définie par $\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$.

En supposant que $\mathbf{A}$ est inversible, montrer que $\det(\mathbf{M}_2) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{D})$.

Exercice 1.31 (★★)

Soient les matrices définies par blocs :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{D} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{D} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{D} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

avec $\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

1. $\mathbf{A}$ est-elle triangulaire? S'il existe, donner son déterminant.
2. Calculer le produit $\mathbf{AB}$.
3. Donner l'inverse de $\mathbf{A}$.
4. Calculer $\mathbf{AC}$.

Exercice 2.16 (★★)

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1-a & 1 & 3 \\ 4 & 4-a & -3 \\ -1 & -1 & -3-a \end{bmatrix}$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que le déterminant de $\mathbf{A}$ est divisible par $-a$ et par $5-a$.