3. Noyau, rang, et solution complète

MTH1008

Sébastien Le Digabel
Polytechnique Montréal

H2024

2024-01-19

v2

Plan

Liens avec le livre et exercices suggérés

1.2	Méthode du pivot de Gauss et formes échelonnées	2, 8, 16, 21, 30, 31, 33
1.5	Ensembles de solutions du système linéaire	1, 5, 8, 10, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 24, 26, 27, 28, 38
4.6	Rang	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34 (revenir plus tard sur les exercices utilisant les bases et la dimension)

Noyau et formes échelonnées

Rang et matrice noyau

Solution complète d'un SÉL

Le noyau de A

Le *noyau* d'une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est l'ensemble des vecteurs qui sont solutions au SÉL $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. On le note $N(\mathbf{A})$ ou $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ ou $\mathrm{Ker}\ \ \mathbf{A}$:

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

- $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ est un *système homogène*
- $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ est un *système non homogène*

Motivation : Le noyau donne la solution complète

- Soit $\mathbf{x}$ une solution au SÉL $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Si $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ est dans le noyau de $\mathbf{A}$, alors $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ est une autre solution au SÉL :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{Ay} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$$

- Trouver le noyau de $\mathbf{A}$ permet donc d'exprimer toutes les solutions au SÉL, à partir d'une *solution particulière*

Solutions triviale et spéciales

- $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est toujours dans le noyau : C'est la *solution triviale*
- Si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ est dans $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$, on l'appelle une *solution non triviale*
- Le noyau est constitué de la solution triviale $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ et de toutes les combinaisons de *solutions spéciales*
- Les solutions spéciales sont construites à partir de *composantes libres* et de *pivots*
- Le noyau contient soit un unique vecteur (et c'est $\mathbf{0}$), soit une infinité de vecteurs

Matrice échelonnée

- Une matrice est *échelonnée* si le premier élément non nul d'une ligne (le *coefficient principal*) est toujours situé dans une colonne à droite du premier élément non nul de la ligne précédente
- **Exemple :** x_1, x_4, x_5 sont les *variables pivots* et x_2, x_3, x_6 sont les *variables libres* :

$$\mathbf{U} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & & & x_4 & x_5 & \\ \downarrow & & & \downarrow & \downarrow & \end{array} \\ \begin{bmatrix} \mathsf{p} & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \mathsf{p} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{p} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 6} \\ \begin{array}{cccccc} & \uparrow & \uparrow & & & \uparrow \\ & x_2 & x_3 & & & x_6 \end{array} \end{array}$$

Obtenir une matrice échelonnée

Pour obtenir la forme échelonnée d'une matrice quelconque :

1. Appliquer la procédure d'élimination si un pivot est disponible
2. Si un zéro apparaît à la place d'un pivot mais il existe un élément non nul dans la même colonne, permuter les lignes pour obtenir un pivot
3. Si aucun pivot n'est disponible dans une colonne, passer à la prochaine colonne pour appliquer la procédure d'élimination

Obtenir une matrice échelonnée

Pour obtenir la forme échelonnée d'une matrice quelconque :

1. Appliquer la procédure d'élimination si un pivot est disponible
2. Si un zéro apparaît à la place d'un pivot mais il existe un élément non nul dans la même colonne, permuter les lignes pour obtenir un pivot
3. Si aucun pivot n'est disponible dans une colonne, passer à la prochaine colonne pour appliquer la procédure d'élimination

Définitions

- Les colonnes contenant un pivot correspondent aux *variables pivots*, ou *variables liées*, ou *inconnues principales*
- Les colonnes ne contenant pas de pivot correspondent aux *variables libres*, ou *inconnues secondaires*

Résolution de $\mathrm{Ax} = 0$ (solutions spéciales)

Pour résoudre le SÉL $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, c'est-à-dire **obtenir le noyau de $\mathbf{A}$** :

1. Obtenir $\mathbf{U}$ la forme échelonnée de $\mathbf{A}$. Résoudre $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ revient à résoudre $\mathbf{Ux} = \mathbf{0}$; Ou encore $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = \mathrm{Ker}(\mathbf{U})$
2. Poser la première variable libre égale à 1 et les autres variables libres égales à 0
3. Résoudre le système triangulaire ainsi obtenu pour les variables pivots. Ceci donne la première *solution spéciale*
4. Répéter les étapes 2 et 3 pour chacune des autres variables libres. Ceci donne les *solutions spéciales* du SÉL

Résolution de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$

- Si $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_p$ sont les solutions spéciales du SÉL alors

$$\text{Ker}(\mathbf{A}) = \text{Vect}\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_p\}$$

- On peut aussi écrire que la solution complète est la *forme paramétrique vectorielle* :

$$\mathbf{x} = x_{i_1}\mathbf{s}_1 + x_{i_2}\mathbf{s}_2 + \ldots + x_{i_p}\mathbf{s}_p$$

  avec $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p}$ les p variables libres *associées* aux p solutions spéciales : $\mathbf{s}_k$ a été obtenue en fixant la variable libre x_{i_k} à 1 et les autres variables libres à 0

- Il est plus simple de ne pas numéroter les solutions spéciales $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$, ..., $\mathbf{s}_p$, mais plutôt $\mathbf{s}_{i_1}$, $\mathbf{s}_{i_2}$, ..., $\mathbf{s}_{i_p}$

Exemple 1

Trouver le noyau de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & 10 \\ 3 & 3 & 10 & 13 \end{bmatrix}$$

avec la forme échelonnée $\mathbf{U}$

Remarques

- Si $\mathbf{A}$ est de taille $m \times n$ alors elle possède au plus m pivots : il ne peut y avoir plus de pivots que de lignes
- Le nombre de pivots ne peut pas non plus dépasser le nombre de colonnes
- Si $m < n$ (plus de colonnes que de lignes) alors il y a au moins $n - m > 0$ variables libres. Dans ce cas, le noyau contient des solutions non triviales : $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) \neq \{\mathbf{0}\}$
- Le nombre de pivots est appelé le *rang* de $\mathbf{A}$

Matrice échelonnée réduite

- Une matrice $\mathbf{R}$ est *échelonnée réduite* si
  1. Elle est échelonnée
  2. Chaque pivot est égal à 1
  3. Chaque pivot est le seul élément non nul dans sa colonne
- **Exemple :**

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & * & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 6}$$

- On obtient la forme échelonnée réduite en poursuivant l'élimination de façon à obtenir des zéros au-dessus des pivots, puis en divisant chaque ligne par son pivot (si elle en contient un)

Remarques

- $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = \mathrm{Ker}(\mathbf{U}) = \mathrm{Ker}(\mathbf{R})$
- Obtenir les solutions spéciales à partir de $\mathbf{R}$ est plus facile : on trouve les coefficients de chaque solution spéciale avec les coefficients de la colonne libre

Exemple 2

Trouver le noyau de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & 10 \\ 3 & 3 & 10 & 13 \end{bmatrix}$$

avec la forme échelonnée réduite $\mathbf{R}$

Liens avec l'indépendance linéaire

- Les colonnes d'une matrice $\mathbf{A}$ sont linéairement indépendantes si la seule solution de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ est $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- Autrement dit, les colonnes de $\mathbf{A}$ sont indépendantes ssi $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$
- Toute solution non triviale de $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ fournit une relation linéaire entre les colonnes de $\mathbf{A}$
- **Exemple 3 :** Exercice 1.7.32

Noyau et formes échelonnées

Rang et matrice noyau

Solution complète d'un SÉL

Rang d'une matrice

Idée : une matrice de taille $m \times n$, une fois réduite, peut contenir des lignes nulles qui correspondent à des équations redondantes

La "vraie" taille d'une matrice est son *rang*

Définition

Le *rang* d'une matrice A est le nombre de pivots de la matrice. Il est noté $r(\mathbf{A})$ ou $\operatorname{rang}(\mathbf{A})$ ou $\operatorname{rang} \mathbf{A}$

Remarque :

Si $\mathbf{A}$ est de taille $m \times n$ alors :

$$\begin{aligned} r(A) &\leq \text{nombre de lignes de } \mathbf{A} &= m \\ r(A) &\leq \text{nombre de colonnes de } \mathbf{A} &= n \end{aligned}$$

Liens avec l'indépendance linéaire

- Les colonnes de la matrice $\mathbf{A}^{m \times n}$ sont linéairement indépendantes si et seulement si $r(\mathbf{A}) = n$

Conséquence importante :

- Si $n > m$ alors n vecteurs de $\mathbb{R}^m$ sont nécessairement dépendants

Matrice noyau

- Si $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \ldots, \mathbf{s}_{n-r}$ sont les solutions spéciales d'une matrice $\mathbf{A}$ alors la *matrice noyau* correspondante est

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \cdots & \mathbf{s}_{n-r} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times(n-r)}$$

qui satisfait $\mathbf{AN} = \mathbf{RN} = \mathbf{0}$

- Si les r premières colonnes sont les colonnes pivots, on peut écrire $\mathbf{R}$ sous la forme :

$$\mathbf{R} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}^{r\times r} & \mathbf{F}^{r\times(n-r)} \\ \hline \mathbf{0}^{(m-r)\times r} & \mathbf{0}^{(m-r)\times(n-r)} \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

(si des permutations sont en jeu, on aura $\mathbf{RP}$ au lieu de $\mathbf{R}$)

Obtention rapide de $\mathbf{N}$ depuis $\mathbf{R}$

Avec $\mathbf{R} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{F} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{m \times n}$

- $\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ signifie

$$\mathbf{I} \begin{bmatrix} \text{variables} \\ \text{pivots} \end{bmatrix} = -\mathbf{F} \begin{bmatrix} \text{variables} \\ \text{libres} \end{bmatrix}$$

- Et de $\mathbf{A}\mathbf{N} = \mathbf{R}\mathbf{N} = \mathbf{0}$, on a

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} -\mathbf{F} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$$

(si des permutations sont en jeu, on aura $\mathbf{P}\mathbf{N}$ au lieu de $\mathbf{N}$)

Matrice noyau $\neq$ Noyau

- **Attention :** Matrice noyau $\mathbf{N} \neq$ Noyau $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$
  (matrice $\neq$ s.e.v.)

- Les colonnes de la matrice noyau sont les $n-r$ solutions spéciales qui génèrent le noyau

Exemple 4 (avec permutation des colonnes de R)

Trouver les solutions spéciales de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & 10 \\ 3 & 3 & 10 & 13 \end{bmatrix}$

Noyau et formes échelonnées

Rang et matrice noyau

Solution complète d'un SÉL

Résolution complète d'un SÉL

Pour résoudre $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

1. Former la matrice augmentée $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$
2. Appliquer la procédure d'élimination à la matrice en **1** pour obtenir la forme échelonnée réduite $[\mathbf{R}|\mathbf{d}]$
3. Résoudre le système correspondant à la matrice en **2** pour les variables pivots en fonction des variables libres, si possible

Important : Une solution existe si et seulement si chaque ligne nulle dans $\mathbf{R}$ est aussi nulle dans $\mathbf{d}$

Solution particulière et solution complète

- Une *solution particulière* $\mathbf{x}_p$ du SÉL $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ (si elle existe) est obtenue en posant toutes les variables libres égales à zéro. On a alors

$$\mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

- Toute solution au SÉL $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ s'écrit

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_n$$

  avec $\mathbf{x}_n \in \mathrm{Ker}(\mathbf{A})$

- Dans le livre, $\mathbf{x}_p = \mathbf{p}$

Matrice de plein rang ligne : $r = m < n$

On considère une matrice $\mathbf{A}$ de taille $m \times n$ avec $r(\mathbf{A}) = m$

- $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{m\times m} & \mathbf{F}^{m\times(n-m)} \end{bmatrix}$
- Chaque ligne possède un pivot
- Il y a $n - m > 0$ variables libres et solutions spéciales
- $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ possède une infinité de solutions

Exemple 5 avec $[\mathbf{A}|b] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right]$

Matrice de plein rang colonne : $r = n < m$

On considère une matrice $\mathbf{A}$ de taille $m \times n$ avec $r(\mathbf{A}) = n$

- $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{n\times n} \\ \mathbf{0}^{(m-n)\times n} \end{bmatrix}$
- Chaque colonne possède un pivot
- Il n'y a aucune variable libre ou solution spéciale
- $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$
- $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ possède soit une solution unique, soit aucune solution

Exemple 6 avec $[\mathbf{A}|b] = \left[\begin{array}{rr|c} 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 2 & b_2 \\ -2 & -3 & b_3 \end{array}\right]$

Matrice carrée de plein rang : $r = m = n$

On considère une matrice $\mathbf{A}$ de taille $n \times n$ avec $r(\mathbf{A}) = n$

- $\mathbf{R} = \mathbf{I}$
- Chaque ligne et chaque colonne possèdent un pivot
- Il n'y a aucune variable libre et aucune solution spéciale
- $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$
- $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ possède une solution unique $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$

Matrice qui n'est pas de plein rang : $r < m$ et $r < n$

On considère une matrice $\mathbf{A}$ de taille $m \times n$ avec

$$r(\mathbf{A}) = r < \min\{m, n\}$$

- $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{r\times r} & \mathbf{F}^{r\times(n-r)} \\ \mathbf{0}^{(m-r)\times r} & \mathbf{0}^{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}$
- Certaines lignes et certaines colonnes n'ont pas de pivot
- Il y a $n - r$ variables libres et solutions spéciales
- $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ possède soit aucune solution, soit une infinité de solutions

Résumé

Les 4 possibilités sont :

$r = m < n$	plein rang ligne	$\mathbf{R} = [\mathbf{I}\ \mathbf{F}]$	∞ de sol.
$r = n < m$	plein rang colonne	$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$	0 ou 1 sol.
$r = m = n$	plein rang	$\mathbf{R} = \mathbf{I}$	1 solution
$r < m$ et $r < n$	pas de plein rang	$R = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	0 ou ∞ de sol.