

MTH1008 — Algèbre linéaire appliquée

Série 3 : Noyau, rang et solution complète

Exercices (énoncés)

Les numéros renvoient au manuel [alfa](#) (série d'exercices.numéro).

Exercice 2.1 vrai ou faux ?(★)

1. Toute matrice diagonale est échelonnée.
2. Toute matrice diagonale échelonnée est réduite.
3. Une matrice carrée échelonnée a ses pivots sur sa diagonale.
4. Une matrice échelonnée ne peut pas avoir des pivots sous sa diagonale.
5. Pour la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, est-il possible que l'algorithme d'élimination de Gauss produise deux formes échelonnées différentes ?
6. Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ trois matrices telles que $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ et $\mathbf{B} \sim \mathbf{C}$, alors $\mathbf{A} \sim \mathbf{C}$.
7. Une forme échelonnée de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ est aussi sa forme échelonnée réduite.
8. Une matrice carrée échelonnée réduite est nécessairement inversible.
9. Une matrice carrée échelonnée réduite qui possède autant de coefficients non nuls que de colonnes est inversible.
10. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ une matrice ligne, alors $\mathbf{A}$ est déjà sous forme échelonnée.
11. Soit $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice de permutation, alors $(\mathbf{I}_n + \mathbf{P})(\mathbf{I}_n - \mathbf{P}^\top) + \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}$.

Exercice 2.5 (★★)

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

1. Échelonner $\mathbf{A}$ en y appliquant l'algorithme d'échelonnement de Gauss de Gauss pour déterminer une forme échelonnée $\mathbf{U}$. Mettre en évidence les pivots utilisés en les encadrant à chaque étape.
2. Réduire $\mathbf{A}$ en y appliquant l'algorithme de réduction de Gauss-Jordan de Gauss-Jordan pour déterminer une forme échelonnée réduite $\mathbf{R}$.
3. Donner le nombre et les valeurs des pivots.

4. Est-ce que l'algorithme d'échelonnement de Gauss aurait pu produire des pivots différents ?
5. $\mathbf{A}$ est-elle inversible ?
6. Donner les matrices d'élimination, de permutation, et de mise à l'échelle par lesquelles $\mathbf{A}$ a été multipliée pour obtenir les matrices $\mathbf{U}$ et $\mathbf{R}$.

Exercice 2.6 (★)

On considère la même matrice $\mathbf{A}$ que dans l'exercice 2.5.

1. Donner la matrice $\mathbf{U}$ obtenue en faisant un choix de permutation différent de celui effectué à l'exercice 2.5, lors de la première étape de l'algorithme d'échelonnement de Gauss de Gauss.
2. Identifier les nouveaux pivots et vérifier que leur produit est toujours égal à -15 , comme dans l'exercice 2.5.

Exercice 2.13 (★)

Soient $\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$, $\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 5 \\ 3 & 9 & 3 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$, $\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$, $\mathbf{M}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 9 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$, $\mathbf{M}_5 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $\mathbf{M}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$. Pour chacune des matrices :

1. Déterminer une forme échelonnée équivalente à la matrice considérée équivalente en appliquant l'algorithme de Gauss.
2. En déduire la forme échelonnée réduite équivalente à la matrice considérée.

Exercice 1.16 structure de la matrice noyau (★)

Soit $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{F} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} -\mathbf{F} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ avec r un entier tel que $r \leq \min\{m, n\}$.

1. Si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, donner les tailles de $\mathbf{F}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, et aussi $\mathbf{B}$ si on veut que le produit $\mathbf{RN}$ soit défini.
2. Exprimer le produit $\mathbf{RN}$.
3. Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont des matrices identité, et si $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ sont des matrices nulles, exprimer le produit $\mathbf{RN}$.

Exercice 6.1 hyperplan et noyau (★★)

Soit l'hyperplan $x + 2y - 3z - t = 0$ de $\mathbb{R}^4$. Donner une matrice $\mathbf{A}$ dont le noyau est cet hyperplan. Trouver trois vecteurs linéairement indépendants appartenant à cet hyperplan. Pourquoi n'est-il pas possible d'en trouver quatre ?

Exercice 6.2 vrai ou faux (★★)

Répondez par vrai ou faux en justifiant vos réponses :

1. Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{D}$ deux matrices de même taille, où $\mathbf{D}$ est inversible. Alors, $\text{Ker}(\mathbf{A}) = \text{Ker}(\mathbf{DA})$.
2. Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{D}$ deux matrices de même taille, où $\mathbf{D}$ est inversible. Alors, $\text{Ker}(\mathbf{A}) = \text{Ker}(\mathbf{AD})$.

Exercice 6.4 (★)

Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

1. En toute généralité, de quels espaces vectoriels $\text{Ker}(\mathbf{A})$ et $\text{Im}(\mathbf{A})$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?
2. Donner une base de $\text{Ker}(\mathbf{A})$.

Exercice 6.5 (★)

Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}.$$

1. En toute généralité, de quels espaces vectoriels $\text{Ker}(\mathbf{A})$ et $\text{Im}(\mathbf{A})$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?
2. Donner une base de $\text{Ker}(\mathbf{A})$.

Exercice 6.6 (★)

Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}.$$

1. En toute généralité, de quels espaces vectoriels $\text{Ker}(\mathbf{A})$ et $\text{Im}(\mathbf{A})$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?
2. Donner une base de $\text{Ker}(\mathbf{A})$.

Exercice 6.7 (★)

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$.

1. En toute généralité, de quels espaces vectoriels $\text{Ker}(\mathbf{A})$ et $\text{Im}(\mathbf{A})$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?
2. Donner une base de $\text{Ker}(\mathbf{A})$.

Exercice 6.8 (★)

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$.

1. En toute généralité, de quels espaces $\text{Ker}(\mathbf{A})$ et $\text{Im}(\mathbf{A})$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?
2. Donner une base de $\text{Ker}(\mathbf{A})$.

Exercice 6.9 (★)

Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}.$$

1. Quel est le rang maximal possible de $\mathbf{A}$?
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(\mathbf{A})$.
3. En déduire la dimension de $\text{Ker}(\mathbf{A})$.

Exercice 6.18 (★)

Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculer le rang de $\mathbf{A}$, la dimension de $\text{Ker}(\mathbf{A})$ et vérifier le théorème du rang.

Exercice 6.19 (★)

Soit

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Déterminer le rang de $\mathbf{A}(t)$ et la dimension de $\text{Ker}(\mathbf{A}(t))$ pour tout t , puis vérifier le théorème du rang.

Exercice 6.26 (★)

Soient $k \in \mathbb{R}$ et la matrice à paramètre

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & k & -1 \end{bmatrix}.$$

1. Donner $\text{rg}(\mathbf{A}_k)$ selon les valeurs de k .
2. Donner les valeurs de k pour lesquelles :
 - (a) le système $\mathbf{A}_k \mathbf{x} = \mathbf{b}$ admet au moins une solution pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$;
 - (b) les colonnes de $\mathbf{A}_k$ sont linéairement indépendantes ;
 - (c) le système $\mathbf{A}_k \mathbf{x} = \mathbf{b}$ admet au plus une solution pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$;
 - (d) selon le membre de droite $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, le système $\mathbf{A}_k \mathbf{x} = \mathbf{b}$ admet soit une solution unique, soit une infinité de solutions ;
 - (e) le système $\mathbf{A}_k \mathbf{x} = \mathbf{b}$ admet une solution unique pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$;
 - (f) $\mathbf{A}_k$ est inversible.
3. Donner les solutions spéciales du noyau associées à $\mathbf{A}_2$.

Exercice 6.27 (★)

Soit

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3] \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$$

telle que $\text{rg}(\mathbf{A}) = 2$ et $\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$. Donner une base de $\text{Ker}(\mathbf{A})$.

Exercice 8.1 vrai ou faux (★)

Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

1. Un système de m équations et n inconnues, avec $m < n$, possède toujours une infinité de solutions.
2. Si le noyau de $\mathbf{A}$ est réduit au vecteur nul, alors $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possède une unique solution pour tout $\mathbf{b}$.
3. Soient une matrice $\mathbf{A}$ et un scalaire $k \neq 0$. On a $\text{Ker}(\mathbf{A}) = \text{Ker}(k\mathbf{A})$.

Exercice 8.3 (★★)

Soit le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x + \kappa z = 0 \\ x + (\kappa + 1)y - z = 0 \end{cases}$$

où $\kappa \in \mathbb{R}$.

1. Donner $\mathbf{A}$ et $\mathbf{b}$ afin de pouvoir écrire le système sous la forme matricielle $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.
2. Déterminer les conditions sur κ pour que le système
 - ▷ ne possède aucune solution ;
 - ▷ possède une infinité de solutions ;
 - ▷ possède une solution unique.
3. Résoudre le système pour $\kappa = 2$.
4. Résoudre le système pour $\kappa = -1$.

Exercice 8.11 (★★)

Soient $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et deux vecteurs $\mathbf{b}_1$ et $\mathbf{b}_2$ dans $\mathbb{R}^m$ tels que

$$[\mathbf{R} \ \mathbf{d}_1 \ \mathbf{d}_2] = \mathbf{M}[\mathbf{A} \ \mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2]$$

avec $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{d}_1$ et $\mathbf{d}_2$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^m$, et $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ inversible.

1. Si $m = n$ et $\mathbf{R} = \mathbf{I}$, exprimer $\mathbf{M}$ en fonction de $\mathbf{A}$, puis $\mathbf{b}_1$ et $\mathbf{b}_2$ en fonction uniquement de $\mathbf{A}$, $\mathbf{d}_1$ et $\mathbf{d}_2$.
2. Si $n > m$ et $\mathbf{R} = [\mathbf{I} \ \mathbf{F}]$ avec $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$, trouver $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$ dans $\mathbb{R}^n$ tels que $\mathbf{Ax}_1 = \mathbf{b}_1$ et $\mathbf{Ax}_2 = \mathbf{b}_2$.

Exercice 8.13 (★★)

Selon la matrice $\mathbf{A}$ donnée ci-dessous, déterminer si le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ est réalisable pour tout $\mathbf{b}$ et indiquer le nombre de solutions du système le cas échéant.

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
3. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Exercice 8.14 (★★)

Pour chacune des matrices données à l'exercice 8.13, si le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ est réalisable pour tout $\mathbf{b}$, exprimer la solution complète du système.

Exercice 8.20 (★)

Soient $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ et $\mathbf{x}_p$ une solution du système linéaire $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Soit $\mathbf{x}_s \in \text{Ker}(\mathbf{A})$. Montrer que $\mathbf{x}_p - 2\mathbf{x}_s$ est également une solution du même système linéaire.