# 2. Systèmes d'équations linéaires et élimination

MTH1008

Sébastien Le Digabel
Polytechnique Montréal

H25

2025-01-06

v1

# Plan

Systèmes d'équations linéaires

L'élimination à l'aide de matrices

Matrices inverses

# Liens avec le livre et exercices suggérés

| | | |
|---|---|---|
| 1.1 | Systèmes d'équations linéaires | 3, 8, 12, 14, 15, 18, 19, 22, 25, 26, 28, 33, 34 |
| 1.4 | L'équation matricielle $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ | 7, 8, 9, 14, 17, 24, 25, 29, 33, 39 |
| 2.2 | Inverse d'une matrice | 1, 5, 7, 9, 12, 13, 15, 17, 19, 20, 22, 28, 30, 32, 33, 34, 35, 37, 38 |
| 2.3 | Caractérisations des matrices inversibles | 1, 3, 7, 12, 13, 14, 16, 18, 19, 21, 26, 27, 29, 31, 33, 38 |

## Systèmes d'équations linéaires

L'élimination à l'aide de matrices

Matrices inverses

# Systèmes d'équations linéaires (SÉL)

Un SÉL à $m$ équations et $n$ inconnues s'écrit $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

ou encore

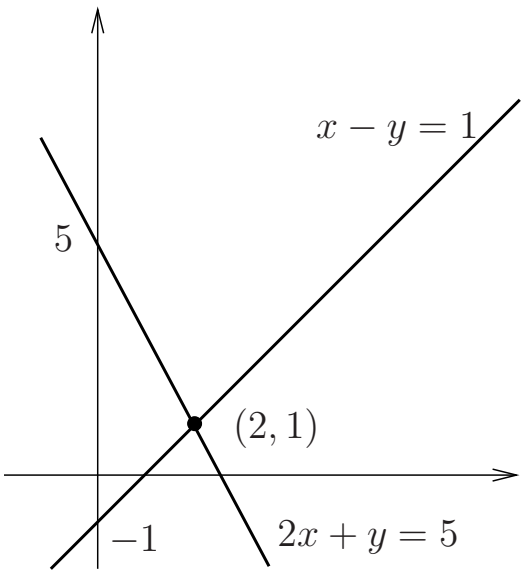
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

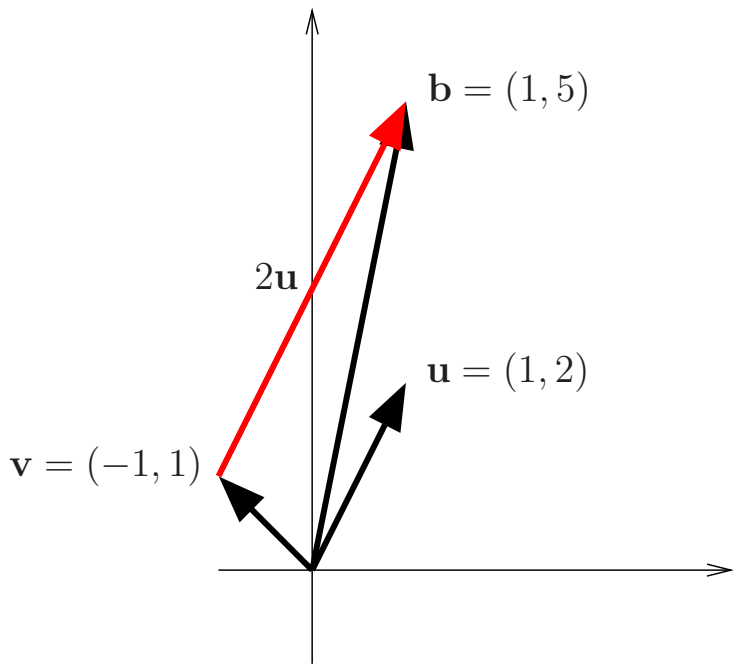
# Exemple avec $m = n = 2$

Soit le SÉL

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

Deux points de vue : *Portrait des lignes* et *portrait des colonnes* :



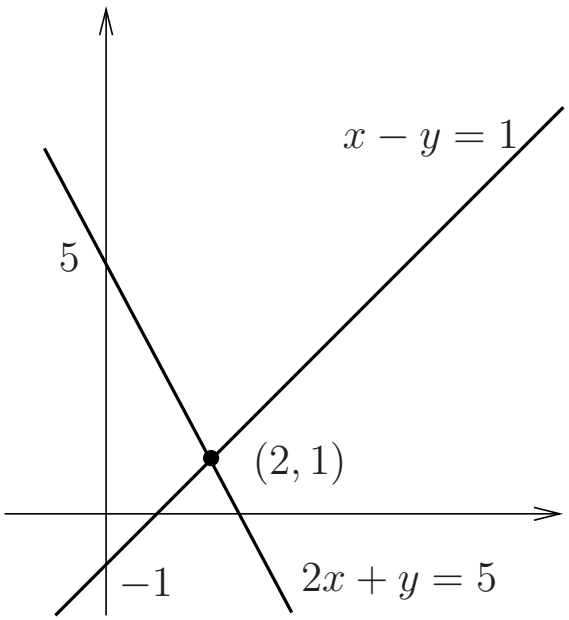



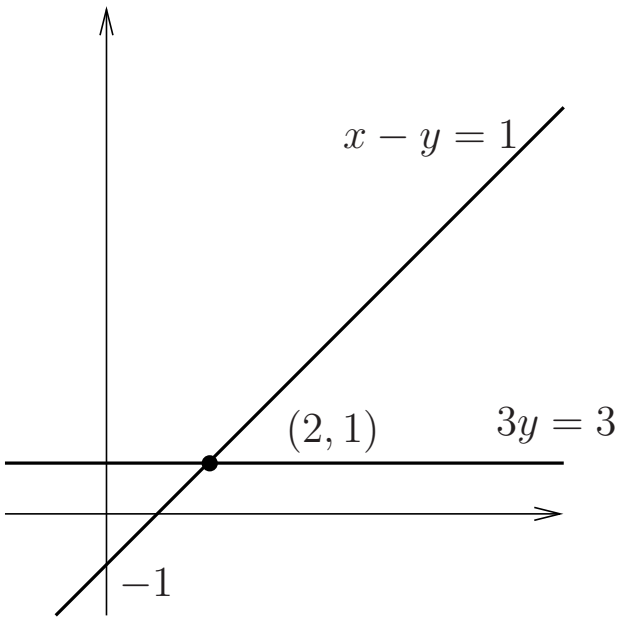
# Exemple (suite)

Soit le SÉL

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

Élimination :



# Principe de l'élimination de Gauss

- L'objectif de l'élimination est d'obtenir un système triangulaire supérieur : On passe de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ à $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$ avec $\mathbf{U}$ une matrice triangulaire supérieure (les coefficients sous la diagonale sont nuls)
- L'élimination est suivie d'une remontée triangulaire qui permet de construire simplement la solution $\mathbf{x}$
- Le *pivot* $p_j$ est le premier coefficient non nul de la ligne $j$ qui fait l'élimination
- Le *multiplicateur* $\ell_{ij}$ est le ratio du coefficient $a_{ij}$ à éliminer sur le pivot (et donc le pivot ne peut être nul)
- On effectue l'opération $a_{ij} - \ell_{ij} p_j$ pour éliminer le coefficient $a_{ij}$

# Procédure générale de l'élimination de Gauss

(ou méthode du pivot de Gauss)

Pour résoudre un SÉL :

1. Utiliser la première équation pour générer par élimination des zéros sous le premier pivot :
$$L_2 \leftarrow L_2 - \ell_{21} L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 - \ell_{31} L_1, \text{ etc.}$$

2. Utiliser la nouvelle deuxième équation pour générer par élimination des zéros sous le deuxième pivot :
$$L_3 \leftarrow L_3 - \ell_{32} L_2,\ L_4 \leftarrow L_4 - \ell_{42} L_2, \text{ etc.}$$

3. Continuer ainsi jusqu'à l'obtention d'un système triangulaire

4. Résoudre par remontée triangulaire le système obtenu à l'étape 3

# Système augmenté

- L'élimination des deux membres du SÉL $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ n'affecte pas le vecteur des variables $\mathbf{x}$. C'est pourquoi il n'est pas nécessaire de l'inclure dans les calculs

- On travaille plutôt avec la *matrice augmentée* du système (ou système *complet*, ou *matrice complète* du sytème) :

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

# Exemple 1

En utilisant l'élimination, résoudre le système $3 \times 3$ suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 & +4x_2 & -2x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & +9x_2 & -3x_3 & = & 8 \\ -2x_1 & -3x_2 & +7x_3 & = & 10 \end{cases}$$

# Échecs de l'élimination

1. **Échec de type 1 :** Après l'élimination, le système triangulaire obtenu possède une équation de la forme $0x = b$ où $b \neq 0$
   $\rightarrow$ le SÉL ne possède pas de solution

2. **Échec de type 2 :** Après l'élimination, le système triangulaire obtenu possède une équation de la forme $0x = 0$
   $\rightarrow$ le SÉL possède une infinité de solutions

3. **Échec de type 3 :** Le SÉL a un premier *pivot* qui est nul
   $\rightarrow$ la solution est de permuter les lignes

En tout, il y a donc 3 possibilités : Aucune solution, solution unique, ou infinité de solutions

# Remarques

- Pour un SÉL à $n$ équations et $n$ inconnues (système carré, matrice $\mathbf{A}$ carrée) :

  1. Cette procédure fonctionne si le système triangulaire possède un ensemble de $n$ pivots (non nuls), qui sont situés sur la diagonale

  2. Si le système triangulaire possède $n$ pivots (non nuls) alors on dit que le SÉL est *non singulier*. Sinon, il est *singulier*

- De façon plus générale ($\mathbf{A}$ carrée ou rectangulaire) : Le système est dit *compatible* s'il possède au moins une solution

# Existence d'une solution

Les énoncés suivants sont équivalents :

**a** $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ est compatible pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$

**b** Tout vecteur de $\mathbb{R}^m$ est une combinaison des colonnes de $\mathbf{A}$

**c** Les colonnes de $\mathbf{A}$ engendrent $\mathbb{R}^m$

**d** Chaque ligne de $\mathbf{A}$ possède un pivot non nul

Systèmes d'équations linéaires

## L'élimination à l'aide de matrices

Matrices inverses

# L'élimination à l'aide de matrices (1/2)

- La matrice d'élimination élémentaire $\mathbf{E}_{ij}$ qui soustrait de la $i$-ième ligne de $\mathbf{A}$ un multiple $\ell_{ij}$ (le multiplicateur) de la $j$-ième ligne est obtenue en remplaçant par $-\ell_{ij}$ le $0$ en position $(i, j)$ dans la matrice identité $\mathbf{I}$ :

$$\mathbf{E}_{ij}\mathbf{A} \text{ effectue l'opération } \mathbf{L}_i \leftarrow L_i - \ell_{ij}\mathbf{L}_j$$

- La matrice de permutation $\mathbf{P}_{ij}$ qui interchange les lignes $i$ et $j$ est obtenue en interchangeant les lignes $i$ et $j$ dans la matrice identité $\mathbf{I}$ :

$$\mathbf{P}_{ij}\mathbf{A} \text{ effectue l'opération } \mathbf{L}_i \leftrightarrow \mathbf{L}_j$$

# L'élimination à l'aide de matrices (2/2)

La multiplication des deux membres du SÉL $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ par $\mathbf{E}_{ij}$ ou $\mathbf{P}_{ij}$ n'affecte pas le vecteur des variables $\mathbf{x}$. C'est pourquoi il n'est pas nécessaire d'inclure ce vecteur dans les calculs.

On travaille plutôt avec la *matrice augmentée* du système :

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

# Exemple 2

En utilisant l'élimination à l'aide de matrices, résoudre le système $3 \times 3$ suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 & +4x_2 & -2x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & +9x_2 & -3x_3 & = & 8 \\ -2x_1 & -3x_2 & +7x_3 & = & 10 \end{cases}$$

Systèmes d'équations linéaires

L'élimination à l'aide de matrices

## Matrices inverses

# Matrices inverses

## Définition

Une matrice carrée $\mathbf{A}$ est *inversible*, ou *non singulière*, s'il existe une matrice $\mathbf{A}^{-1}$ telle que $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ où $\mathbf{I}$ est la matrice identité

Exercice 2.2.9 a) : Prouver que montrer que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ suffit à démontrer que $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$

## Théorème

Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont des matrices inversibles de même taille alors $\mathbf{AB}$ est inversible et

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

# Matrices inverses : Propriétés

Avec $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, les énoncés suivants sont équivalents :

- **a** $\mathbf{A}$ est inversible
- **b** $\mathbf{A}$ peut se réduire à $\mathbf{I}$
- **c1** $\mathbf{A}$ admet $n$ pivots non-nuls
- **c2** $r(\mathbf{A}) = n$
- **d1** La seule solution de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ est $\mathbf{0}$
- **d2** $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$
- **e** Les colonnes de $\mathbf{A}$ sont indépendantes
- **g1** $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ admet au moins une solution pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$
- **g2** $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ admet une solution unique pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$
- **h** Les colonnes de $\mathbf{A}$ engendrent $\mathbb{R}^n$
- **j** Il existe $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$
- **k** Il existe $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que $\mathbf{AD} = \mathbf{I}$
- **l** $\mathbf{A}^\top$ est inversible

# Matrice inverse $2 \times 2$

Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et $ad - cb \neq 0$, alors $\mathbf{A}^{-1}$ existe et

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$ad - bc$ est le *déterminant* de $\mathbf{A}$

# Inverse d'une matrice d'élimination

**Rappel :** La matrice d'élimination $\mathbf{E}_{ij}$ qui soustrait de la $i$-ième ligne un multiple $\ell_{ij}$ (le multiplicateur) de la $j$-ième ligne est obtenue en remplaçant par $-\ell_{ij}$ le $0$ en position $(i, j)$ dans la matrice identité $\mathbf{I}$

**L'inverse de $\mathbf{E}_{ij}$** est obtenue en remplaçant le $-\ell_{ij}$ par $\ell_{ij}$, à la même position. $\mathbf{E}_{ij}^{-1}$ correspond donc à une autre matrice d'élimination, qui permet de revenir à $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{E}_{ij}^{-1}\mathbf{E}_{ij}\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

# Élimination par blocs

Si $\mathbf{M} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right]$, alors la matrice d'élimination

$$\mathbf{E} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline -\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{I} \end{array}\right]$$

effectue l'élimination par blocs suivante :

$$\mathbf{E}\mathbf{M} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{array}\right]$$

# Solution d'un SÉL

Si $\mathbf{A}$ est inversible, alors il y a une solution unique au SÉL $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ donnée par

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Mais en pratique, **il ne faut jamais inverser une matrice pour résoudre un SÉL**. Au lieu, on applique la procédure d'élimination de Gauss, moins coûteuse

# Inverser une matrice avec des SÉL

- On considère les colonnes de la matrice identité

$$\mathbf{I} = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \ldots \ \mathbf{e}_n]$$

- Si $\mathbf{A}^{-1}$ existe, la résolution de $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_1$ donnera la solution $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_1$ qui est la première colonne de $\mathbf{A}^{-1}$
- Pour inverser $\mathbf{A}$ au complet, on peut donc résoudre les $n$ SÉL $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_i$ pour $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, chaque résolution donnant une colonne de $\mathbf{A}^{-1}$
- La procédure de Gauss-Jordan vue ci-après résout ces $n$ SÉL en même temps en considérant le système augmenté $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$

# Procédure de Gauss-Jordan pour calculer l'inverse d'une matrice

Pour trouver l'inverse de $\mathbf{A}$ :

1. On forme la matrice augmentée $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$
2. On applique la procédure d'élimination de Gauss pour obtenir des 0 en dessous des pivots
3. On applique ensuite la procédure d'élimination de Gauss pour obtenir des 0 au-dessus des pivots
4. On divise chaque ligne de la matrice résultante par la valeur du pivot
5. On obtient ainsi la matrice augmentée $[\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}]$

# Gauss-Jordan (suite)

**Remarque :** Si on obtient au moins un pivot nul, la procédure s'arrête et on en conclut que la matrice n'est pas inversible (ou *singulière*)

**Exemple 3 :** Inverser $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$