2. Systèmes d'équations linéaires et élimination

MTH1008

Sébastien Le Digabel
Polytechnique Montréal

H2024

2023-12-18

v1

Plan

Liens avec le livre et exercices suggérés

1.1	Systèmes d'équations linéaires	3, 8, 12, 14, 15, 18, 19, 22, 25, 26, 28, 33, 34
1.4	L'équation matricielle $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$	7, 8, 9, 14, 17, 24, 25, 29, 33, 39
2.2	Inverse d'une matrice	1, 5, 7, 9, 12, 13, 15, 17, 19, 20, 22, 28, 30, 32, 33, 34, 35, 37, 38
2.3	Caractérisations des matrices inversibles	1, 3, 7, 12, 13, 14, 16, 18, 19, 21, 26, 27, 29, 31, 33, 38

Systèmes d'équations linéaires

L'élimination à l'aide de matrices

Matrices inverses

Systèmes d'équations linéaires (SÉL)

Un SÉL à m équations et n inconnues s'écrit $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

ou encore

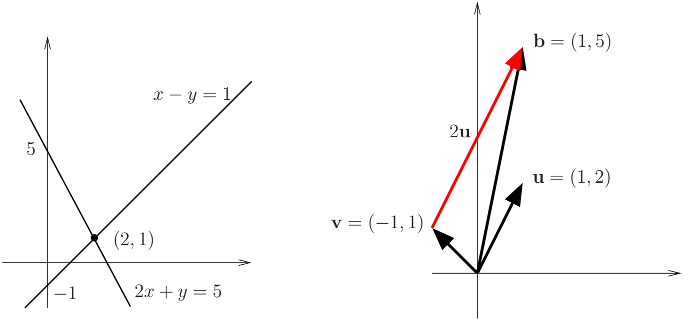
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Exemple avec $m = n = 2$

Soit le SÉL

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 1 \\ 2x & + & y & = & 5 \end{array}\right.$$

Deux points de vue : *Portrait des lignes* et *portrait des colonnes* :

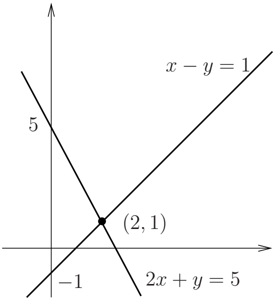


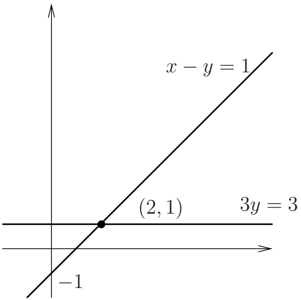
Exemple (suite)

Soit le SÉL

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 1 \\ 2x & + & y & = & 5 \end{array}\right.$$

Élimination :





Principe de l'élimination de Gauss

- L'objectif de l'élimination est d'obtenir un système triangulaire supérieur : On passe de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ à $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$ avec $\mathbf{U}$ une matrice triangulaire supérieure (les coefficients sous la diagonale sont nuls)
- L'élimination est suivie d'une remontée triangulaire qui permet de construire simplement la solution $\mathbf{x}$
- Le *pivot* p_j est le premier coefficient non nul de la ligne j qui fait l'élimination
- Le *multiplicateur* ℓ_{ij} est le ratio du coefficient a_{ij} à éliminer sur le pivot (et donc le pivot ne peut être nul)
- On effectue l'opération $a_{ij} - \ell_{ij} p_j$ pour éliminer le coefficient a_{ij}

Procédure générale de l'élimination de Gauss

(ou méthode du pivot de Gauss)

Pour résoudre un SÉL :

1. Utiliser la première équation pour générer par élimination des zéros sous le premier pivot :
   $L_2 \leftarrow L_2 - \ell_{21}L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - \ell_{31}L_1$, etc.

2. Utiliser la nouvelle deuxième équation pour générer par élimination des zéros sous le deuxième pivot :
   $L_3 \leftarrow L_3 - \ell_{32}L_2$, $L_4 \leftarrow L_4 - \ell_{42}L_2$, etc.

3. Continuer ainsi jusqu'à l'obtention d'un système triangulaire

4. Résoudre par remontée triangulaire le système obtenu à l'étape 3

Système augmenté

- L'élimination des deux membres du SÉL $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ n'affecte pas le vecteur des variables $\mathbf{x}$. C'est pourquoi il n'est pas nécessaire de l'inclure dans les calculs

- On travaille plutôt avec la *matrice augmentée* du système (ou système *complet*, ou *matrice complète* du sytème) :

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Exemple 1

En utilisant l'élimination, résoudre le système 3×3 suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +4x_2 & -2x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & +9x_2 & -3x_3 & = & 8 \\ -2x_1 & -3x_2 & +7x_3 & = & 10 \end{array} \right.$$

Échecs de l'élimination

1. **Échec de type 1 :** Après l'élimination, le système triangulaire obtenu possède une équation de la forme $0x = b$ où $b \neq 0$
$\rightarrow$ le SÉL ne possède pas de solution

2. **Échec de type 2 :** Après l'élimination, le système triangulaire obtenu possède une équation de la forme $0x = 0$
$\rightarrow$ le SÉL possède une infinité de solutions

3. **Échec de type 3 :** Le SÉL a un premier *pivot* qui est nul
$\rightarrow$ la solution est de permuter les lignes

En tout, il y a donc 3 possibilités : Aucune solution, solution unique, ou infinité de solutions

Remarques

- Pour un SÉL à n équations et n inconnues (système carré, matrice $\mathbf{A}$ carrée) :

  1. Cette procédure fonctionne si le système triangulaire possède un ensemble de n pivots (non nuls), qui sont situés sur la diagonale
  2. Si le système triangulaire possède n pivots (non nuls) alors on dit que le SÉL est *non singulier*. Sinon, il est *singulier*

- De façon plus générale ($\mathbf{A}$ carrée ou rectangulaire) : Le système est dit *compatible* s'il possède au moins une solution

Existence d'une solution

Les énoncés suivants sont équivalents :

- **a** $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est compatible pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
- **b** Tout vecteur de $\mathbb{R}^m$ est une combinaison des colonnes de $\mathbf{A}$
- **c** Les colonnes de $\mathbf{A}$ engendrent $\mathbb{R}^m$
- **d** Chaque ligne de $\mathbf{A}$ possède un pivot non nul

Systèmes d'équations linéaires

L'élimination à l'aide de matrices

Matrices inverses

L'élimination à l'aide de matrices (1/2)

- La matrice d'élimination élémentaire $\mathbf{E}_{ij}$ qui soustrait de la i-ième ligne de $\mathbf{A}$ un multiple ℓ_{ij} (le multiplicateur) de la j-ième ligne est obtenue en remplaçant par $-\ell_{ij}$ le 0 en position (i,j) dans la matrice identité $\mathbf{I}$:

$$\mathbf{E}_{ij}\mathbf{A} \text{ effectue l'opération } \mathbf{L}_i \leftarrow L_i - \ell_{ij}\mathbf{L}_j$$

- La matrice de permutation $\mathbf{P}_{ij}$ qui interchange les lignes i et j est obtenue en interchangeant les lignes i et j dans la matrice identité $\mathbf{I}$:

$$\mathbf{P}_{ij}\mathbf{A} \text{ effectue l'opération } \mathbf{L}_i \leftrightarrow \mathbf{L}_j$$

L'élimination à l'aide de matrices (2/2)

La multiplication des deux membres du SÉL $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ par $\mathbf{E}_{ij}$ ou $\mathbf{P}_{ij}$ n'affecte pas le vecteur des variables $\mathbf{x}$. C'est pourquoi il n'est pas nécessaire d'inclure ce vecteur dans les calculs.

On travaille plutôt avec la *matrice augmentée* du système :

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Exemple 2

En utilisant l'élimination à l'aide de matrices, résoudre le système 3×3 suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +4x_2 & -2x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & +9x_2 & -3x_3 & = & 8 \\ -2x_1 & -3x_2 & +7x_3 & = & 10 \end{array} \right.$$

Systèmes d'équations linéaires

L'élimination à l'aide de matrices

Matrices inverses

Matrices inverses

Définition

Une matrice carrée $\mathbf{A}$ est *inversible*, ou *non singulière*, s'il existe une matrice $\mathbf{A}^{-1}$ telle que $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ où $\mathbf{I}$ est la matrice identité

Exercice 2.2.9 a) : Prouver que montrer que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ suffit à démontrer que $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$

Théorème

Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont des matrices inversibles de même taille alors $\mathbf{AB}$ est inversible et

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

Matrices inverses : Propriétés

Avec $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, les énoncés suivants sont équivalents :

- **a** $\mathbf{A}$ est inversible
- **b** $\mathbf{A}$ peut se réduire à $\mathbf{I}$
- **c1** $\mathbf{A}$ admet n pivots non-nuls
- **c2** $r(\mathbf{A}) = n$
- **d1** La seule solution de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ est $\mathbf{0}$
- **d2** $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$
- **e** Les colonnes de $\mathbf{A}$ sont indépendantes
- **g1** $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ admet au moins une solution pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$
- **g2** $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ admet une solution unique pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$
- **h** Les colonnes de $\mathbf{A}$ engendrent $\mathbb{R}^n$
- **j** Il existe $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$
- **k** Il existe $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que $\mathbf{AD} = \mathbf{I}$
- **l** $\mathbf{A}^\top$ est inversible

Matrice inverse 2×2

Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et $ad - cb \neq 0$, alors $\mathbf{A}^{-1}$ existe et

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$ad - bc$ est appelé le *déterminant* de $\mathbf{A}$

Inverse d'une matrice d'élimination

Rappel : La matrice d'élimination $\mathbf{E}_{ij}$ qui soustrait de la i-ième ligne un multiple ℓ_{ij} (le multiplicateur) de la j-ième ligne est obtenue en remplaçant par $-\ell_{ij}$ le 0 en position (i, j) dans la matrice identité $\mathbf{I}$

L'inverse de $\mathbf{E}_{ij}$ est obtenue en remplaçant le $-\ell_{ij}$ par ℓ_{ij}, à la même position. $\mathbf{E}_{ij}^{-1}$ correspond donc à une autre matrice d'élimination, qui permet de revenir à $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{E}_{ij}^{-1}\mathbf{E}_{ij}\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

Élimination par blocs

Si $\mathbf{M} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right]$, alors la matrice d'élimination

$$\mathbf{E} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline -\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{I} \end{array}\right]$$

effectue l'élimination par blocs suivante :

$$\mathbf{E}\mathbf{M} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{array}\right]$$

Solution d'un SÉL

Si $\mathbf{A}$ est inversible, alors il y a une solution unique au SÉL $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ donnée par

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Mais en pratique, **il ne faut jamais inverser une matrice pour résoudre un SÉL**. Au lieu, on applique la procédure d'élimination de Gauss, moins coûteuse

Inverser une matrice avec des SÉL

- On considère les colonnes de la matrice identité

$$\mathbf{I} = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \ldots \ \mathbf{e}_n]$$

- Si $\mathbf{A}^{-1}$ existe, la résolution de $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_1$ donnera la solution $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_1$ qui est la première colonne de $\mathbf{A}^{-1}$
- Pour inverser $\mathbf{A}$ au complet, on peut donc résoudre les n SÉL $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_i$ pour $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, chaque résolution donnant une colonne de $\mathbf{A}^{-1}$
- La procédure de Gauss-Jordan vue ci-après résout ces n SÉL en même temps en considérant le système augmenté $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$

Procédure de Gauss-Jordan pour calculer l'inverse d'une matrice

Pour trouver l'inverse de $\mathbf{A}$:

1. On forme la matrice augmentée $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$
2. On applique la procédure d'élimination de Gauss pour obtenir des 0 en dessous des pivots
3. On applique ensuite la procédure d'élimination de Gauss pour obtenir des 0 au-dessus des pivots
4. On divise chaque ligne de la matrice résultante par la valeur du pivot
5. On obtient ainsi la matrice augmentée $[\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}]$

Gauss-Jordan (suite)

Remarque : Si on obtient au moins un pivot nul, la procédure s'arrête et on en conclut que la matrice n'est pas inversible (ou *singulière*)

Exemple 3 : Inverser $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$