

MTH1008 — Algèbre linéaire appliquée

Série 2 : Élimination

Exercices (énoncés)

Les numéros renvoient au manuel [alfa](#) (série d'exercices.numéro).

Exercice 1.1 Vrai ou faux ? (★)

Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

1. Toute matrice triangulaire est inversible.
2. Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ dans $\mathbb{R}^{n \times n}$. Si $\mathbf{AB}$ est inversible, alors $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont inversibles.
3. Soient $\mathbf{A}$ une matrice quelconque et $\mathbf{b}$ un vecteur quelconque. Si le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ possède une solution unique, alors la matrice $\mathbf{A}$ est inversible.
4. Soient $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ des matrices inversibles de $\mathbb{R}^{n \times n}$. La matrice par blocs $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$ est inversible et son inverse est donnée par $\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} \\ \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix}$.

Exercice 1.24 (★)

Soit $\mathbf{A}$ une matrice carrée qui contient une colonne nulle. En n'utilisant que la définition, montrer que $\mathbf{A}$ est singulière.

Exercice 1.25 (★)

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$.

1. La matrice $\mathbf{A}$ est-elle inversible ?
2. Calculer $\mathbf{AA}^\top$. Cette matrice est-elle inversible ?
3. Calculer $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$. Cette matrice est-elle inversible ?
4. Calculer $(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^\top$.

Exercice 1.27 (★)

Justifier d'au moins trois façons différentes que la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

n'est pas inversible.

Exercice 1.28 (★★)

Soit $\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} 2 & -1 & k \\ 0 & k & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ avec $k \in \mathbb{R}$. Pour quelle(s) valeur(s) de k la matrice $\mathbf{A}_k$ n'est-elle pas inversible ?

Exercice 1.29 une histoire d'inverse (★★)

Soient $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice inversible et $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, un vecteur colonne. Montrer que

$$(\mathbf{F}^{-1} + \mathbf{u}\mathbf{u}^\top)^{-1} = \mathbf{F} - \frac{\mathbf{F}\mathbf{u}\mathbf{u}^\top\mathbf{F}}{1 + \mathbf{u}^\top\mathbf{F}\mathbf{u}} \quad (1)$$

Exercice 1.30 matrices nilpotentes et inversibilité (★★)

Soit $\mathbf{A}$ une matrice telle qu'il existe n tel que $\mathbf{A}^n = 0$ avec $\mathbf{A}$ non nulle.

1. Donner un exemple en dimension 2 pour $n = 2$.
2. Montrer que $\mathbf{A}$ n'est pas inversible.
3. Calculer et simplifier au maximum l'expression suivante

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\mathbf{A}^i - \mathbf{A}^{i+1}).$$

4. Montrer que $(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^{n-1})$ est inversible.

Exercice 1.32 (★★)

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 12 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$.

1. Est-ce que $\mathbf{A}$ est inversible ?
2. Montrer que $(\mathbf{A} - \mathbf{I}_3)(\mathbf{A} + \mathbf{I}_3) = \mathbf{O}_3$.
3. Soit $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice vérifiant $(\mathbf{B} + \mathbf{I}_n)(\mathbf{B} - \mathbf{I}_n) = \mathbf{O}_n$. Montrer que $\mathbf{B}$ est inversible et que son inverse est $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}$.

Exercice 2.2 (★)

Soient $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$.

1. Donner $\mathbf{M}_1$ telle que $\mathbf{A} = \mathbf{M}_1\mathbf{B}$.
2. Donner $\mathbf{M}_2$ telle que $\mathbf{B} = \mathbf{M}_2\mathbf{A}$.

Exercice 2.3 (★)

Soit la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ de l'exercice 2.2, et $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 2 & 8 & 5 \\ 3 & 9 & 6 \end{bmatrix}$. Déterminer une relation matricielle entre $\mathbf{A}$ et $\mathbf{C}$.

Exercice 2.4 (★)

Soit la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ de l'exercice 2.2, et $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 6 & 12 & 18 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$.

1. Donner $\mathbf{M}$ telle que $\mathbf{D} = \mathbf{MA}$.
2. Donner $\mathbf{M}^{-1}$, si elle existe.

Exercice 2.9 (★)

Que va faire l'algorithme d'échelonnement de Gauss si on lui donne la matrice nulle en entrée ?

Exercice 2.14 (★)

Soit la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

1. Est-ce que $\mathbf{A}$ est inversible ? Si oui, donner son inverse.

Exercice 8.2 (★)

Soit le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 = -2 \\ x_1 + 3x_2 = 2 \\ -x_1 + 8x_3 = -4 \end{cases}.$$

1. Écrire ce système sous forme d'équation vectorielle.
2. Écrire le système sous forme matricielle $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, en précisant les dimensions de $\mathbf{A}$, $\mathbf{x}$, et $\mathbf{b}$.
3. Écrire la matrice augmentée du système.
4. Résoudre le système en utilisant la méthode du pivot de Gauss, en entourant les pivots.
5. Vérifier que la solution obtenue satisfait les trois équations du système.

Exercice 8.15 respiration (★)

1. La respiration cellulaire se caractérise par une réaction chimique d'oxydation du glucose : $aC_6H_{12}O_6 + bO_2 \rightarrow cCO_2 + dH_2O$. Trouver a, b, c, d pour équilibrer la réaction.
2. La réaction inverse est la photosynthèse : $aCO_2 + bH_2O \rightarrow cC_6H_{12}O_6 + dO_2$. Trouver a, b, c, d pour équilibrer la réaction.

Exercice 8.16 (★)

Soit le système :

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & & + & 2x_2 & = & 1 \\ -2x_1 & + & x_2 & = & 2 \end{array}$$

1. Écrire la matrice des coefficients du système.
2. Est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
3. Caractériser la ou les solutions du système grâce aux questions précédentes.

Exercice 8.17 (★★)

Résoudre en fonction de a et b

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 = b \\ ax_1 + x_2 + x_3 = b \\ x_1 + x_2 + ax_3 = b \end{cases}$$

Exercice 8.18 (★)

Quel polynôme de degré deux passe par les points $(-1, 4)$, $(1, 4)$, $(0, 2)$?

Exercice 8.19 (★)

On considère l'espace muni du système de coordonnées cartésiennes $\{x, y, z\}$. Soit D_1 la droite d'équations symétriques $\frac{x-3}{5} = \frac{2-y}{2} = x+3$. Soit D_2 la droite d'équations paramétriques $x = 2 + 4t$, $y = -t$, $z = -4 + t$, $t \in \mathbb{R}$.

- (a) Les droites D_1 et D_2 sont-elles orthogonales ?
- (b) Montrer que les droites D_1 et D_2 se croisent et déterminer le point d'intersection.

Exercice 8.24 (★★)

Soit $\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -k \\ 0 & k & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelles valeurs de k la matrice $\mathbf{A}_k$ n'est-elle pas inversible ?
2. On fixe $k = 0$. Calculer l'inverse de $\mathbf{A}_0$.

Exercice 8.26 (★)

$$\text{Soit } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer l'inverse de $\mathbf{A}$ (si possible).
2. Calculer le déterminant de $\mathbf{A}$ et celui de son inverse (si $\mathbf{A}$ est inversible).

Exercice 8.27 (★)

$$\text{Soit } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer l'inverse de $\mathbf{A}$ (si possible).
2. Calculer le déterminant de $\mathbf{A}$ et celui de son inverse (si $\mathbf{A}$ est inversible).

Exercice 8.28 (★)

$$\text{Soit } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer l'inverse de $\mathbf{A}$ (si possible).
2. Calculer le déterminant de $\mathbf{A}$ et celui de son inverse (si $\mathbf{A}$ est inversible).

Exercice 8.29 inverse de matrice par blocs (★★)

Soit la matrice 2×2 par blocs $\mathbf{M} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{array} \right]$, avec $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{D}$ des matrices de tailles compatibles, et $\mathbf{A}$ et $\mathbf{D}$ inversibles. Montrer que $\mathbf{M}$ est inversible et donner son inverse.