1. Matrices et indépendance linéaire

MTH1008

Sébastien Le Digabel
Polytechnique Montréal

H2024

2023-12-18

v1

Plan

Liens avec le livre et exercices suggérés

2.1	Opérations matricielles	2, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 16, 17 19, 21, 22, 23, 24, 28, 34, 39
2.4	Matrices par bloc	1, 4, 5, 7, 9, 12, 15, 21, 23, 25
1.7	Indépendance linéaire	2, 4, 5, 9, 11, 12, 15, 16, 21, 23, 26, 27, 29, 31, 33, 35, 40, 41

Vecteurs en deux dimensions

Un *vecteur* bidimensionnel s'écrit :

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } v_1, v_2 \in \mathbb{R}$$

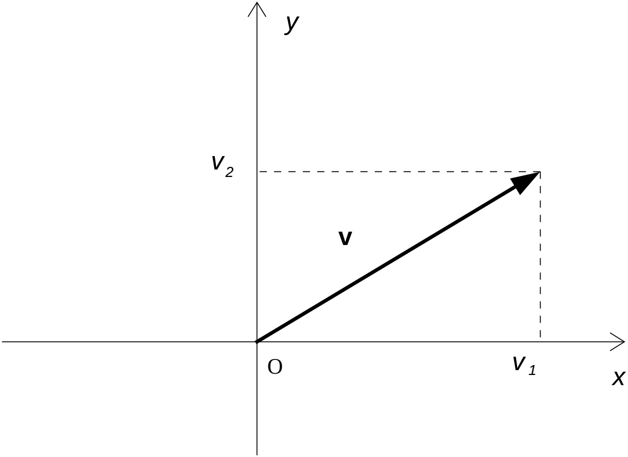
(par convention, un vecteur est toujours sous forme de colonne)

- v_1 est la *première composante* de $\mathbf{v}$
- v_2 est la *deuxième composante* de $\mathbf{v}$

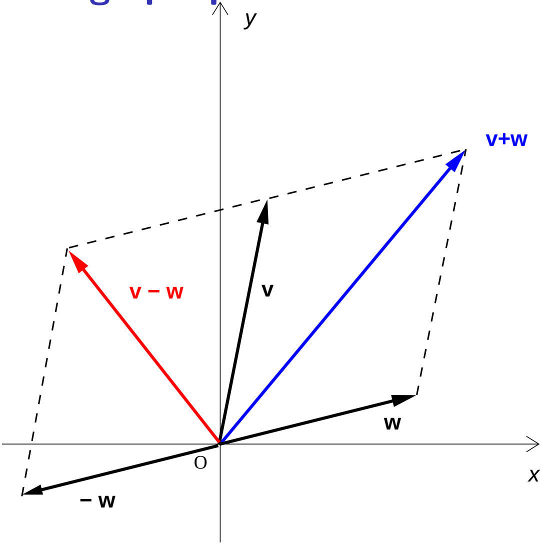
Notation :

- Dans les diapositives et dans le livre : $\mathbf{v}$
- À la main (tableau, copies, etc.) : $\vec{v}$ ou v
- Pour gagner de l'espace, on peut écrire
  $\mathbf{v} = (v_1, v_2) = [v_1 \;\; v_2]^\top$ (sous forme de ligne)

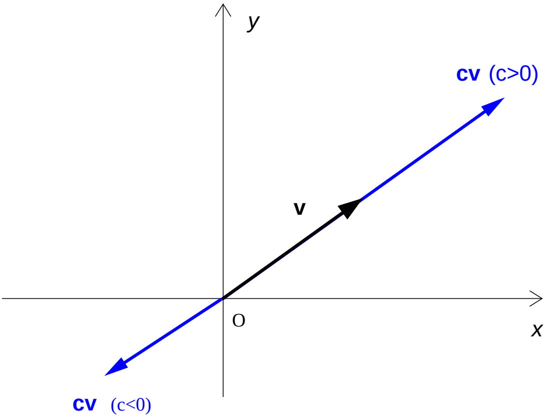
Représentation graphique d'un vecteur 2D



Représentation graphique : Addition et soustraction



Représentation graphique : Multiplication par un scalaire



Vecteurs en dimension n

Un vecteur en dimension n s'écrit :

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = [v_1 \ v_2 \cdots v_n]^\top = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$$

avec $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}$ les *composantes* de $\mathbf{v}$

Combinaisons linéaires

- Une *combinaison linéaire* de p vecteurs est une somme de la forme
$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$$
où $c_1, c_2, \ldots, c_p \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$

- Combinaisons linéaires importantes (pour $p = 2$) :

$$\begin{array}{ll} 1\mathbf{v} + 1\mathbf{w} & \text{(addition)} \\ 1\mathbf{v} - 1\mathbf{w} & \text{(soustraction)} \\ 0\mathbf{v} + 0\mathbf{w} = \mathbf{0} & \text{(vecteur nul)} \\ c\mathbf{v} + 0\mathbf{w} = c\mathbf{v} & \text{(multiplication par un scalaire)} \end{array}$$

Ensemble générateur

Soient les p vecteurs de $\mathbb{R}^n$: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$

- L'ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs est noté $\mathrm{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$
- On dit que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ *engendrent* (ou *génèrent*) $\mathrm{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ qui est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$
- Si $\mathbf{x} \in \mathrm{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$, alors il existe des scalaires $c_1, c_2, \ldots, c_p$ tels que $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_p\mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$

Questions importantes

Si $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sont des vecteurs en trois dimensions (ou plus), quelle est la représentation de **toutes** leurs combinaisons linéaires ?

1. $c\mathbf{u}$? Une droite (sauf si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$)
2. $c\mathbf{u} + d\mathbf{v}$? En général, un plan (mais pas toujours)
3. $c\mathbf{u} + d\mathbf{v} + e\mathbf{w}$? En général, un espace tridimensionnel (mais pas toujours)

(pour tous réels c, d, e)

Produit scalaire et norme (longueur)

- Le *produit scalaire* de deux vecteurs $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ en dimension n est

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n \in \mathbb{R}$$

- Plus tard on préfèrera la notation $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v}^\top \mathbf{w}$
- La *norme* (euclidienne) d'un vecteur $\mathbf{v}$ est

$$\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{1/2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2} \in \mathbb{R}$$

- Un vecteur $\mathbf{v}$ est *unitaire* si $\|\mathbf{v}\| = 1$
- Si $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ alors le vecteur $\dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ est unitaire

Matrice

Une *matrice* de *taille* $m \times n$ est un tableau de nombres arrangés en m lignes et n colonnes :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Le nombre a_{ij}, pour $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ et $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, est le *coefficient* (ou *élément*) de $\mathbf{A}$ situé sur la i-ième ligne et la j-ième colonne. Il est aussi noté $\mathbf{A}(i, j)$

Produit d'une matrice et d'un vecteur (1/2)

Si $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sont trois vecteurs avec $n = 3$, alors la *matrice* ayant pour colonnes ces vecteurs est

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, alors on définit

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_1, v_1, w_1) \cdot (x_1, x_2, x_3) \\ (u_2, v_2, w_2) \cdot (x_1, x_2, x_3) \\ (u_3, v_3, w_3) \cdot (x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_1x_1 + v_1x_2 + w_1x_3 \\ u_2x_1 + v_2x_2 + w_2x_3 \\ u_3x_1 + v_3x_2 + w_3x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Produit d'une matrice et d'un vecteur (2/2)

Autre point de vue :

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v} + x_3\mathbf{w} = x_1 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

Ainsi :

- Premier point de vue : chaque composante de $\mathbf{A}\mathbf{x}$ est le produit scalaire d'une **ligne** de $\mathbf{A}$ avec $\mathbf{x}$
- Deuxième point de vue : le produit $\mathbf{A}\mathbf{x}$ est une combinaison linéaire des **colonnes** de $\mathbf{A}$

Définition des opérations matricielles

- **Addition :** Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont des matrices de même taille alors leur *somme* est la matrice $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ obtenue en additionnant les éléments correspondants de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ pour } i \in \{1, 2, \ldots, m\} \text{ et } j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

- **Multiplication par un scalaire :** Si $k \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{A}$ est une matrice alors $\mathbf{C} = k\mathbf{A}$ est la matrice obtenue en multipliant chaque élément de $\mathbf{A}$ par k :

$$c_{ij} = ka_{ij} \text{ pour } i \in \{1, 2, \ldots, m\} \text{ et } j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

- **Multiplication :** Si $\mathbf{A}$ est une matrice de taille $m \times n$ et $\mathbf{B}$ une matrice de taille $n \times p$ alors leur *produit* est la matrice $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{AB} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ dont l'élément c_{ij} est égal à

$$(i\text{-ième ligne de } \mathbf{A}) \cdot (j\text{-ième colonne de } \mathbf{B})$$

Propriétés des opérations matricielles

Lorsque que les opérations sont possibles, on a

1. $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$ commutativité
2. $k(\mathbf{A}+\mathbf{B})=k\mathbf{A}+k\mathbf{B}$ distributivité
3. $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$ associativité
4. $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$ distributivité à gauche
5. $(\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A}=\mathbf{BA}+\mathbf{CA}$ distributivité à droite
6. $\mathbf{A}(\mathbf{BC})=(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ associativité
7. $\mathbf{A}^p=\mathbf{AA}\ldots\mathbf{A}$ p facteurs
8. $(\mathbf{A}^p)(\mathbf{A}^q)=\mathbf{A}^{p+q}$, $(\mathbf{A}^p)^q=\mathbf{A}^{pq}$ puissances
9. $\mathbf{IA}=\mathbf{AI}=\mathbf{A}$ élément neutre (matrice identitée ou unité)

Remarque : $\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$, même lorsque les deux produits existent

Multiplication de matrices : Quatre points de vue

1. L'élément (i, j) du produit $\mathbf{AB}$ est

$$(i\text{-ième ligne de } \mathbf{A})\cdot(j\text{-ième colonne de } \mathbf{B})$$

2. La j-ième colonne de $\mathbf{AB}$ est égale à $\mathbf{Au}_j$ où $\mathbf{u}_j$ est la j-ième colonne de $\mathbf{B}$: Si $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix}$ alors

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{Au}_1 & \mathbf{Au}_2 & \cdots & \mathbf{Au}_n \end{bmatrix}$$

Multiplication de matrices : Quatre points de vue

3 La i-ième ligne de $\mathbf{AB}$ est égale à $\mathbf{v}_i^\top \mathbf{B}$ où $\mathbf{v}_i^\top$ est la i-ième ligne de $\mathbf{A}$:

$$\text{Si } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^\top \\ \mathbf{v}_2^\top \\ \cdots \\ \mathbf{v}_m^\top \end{bmatrix} \text{ alors } \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^\top \mathbf{B} \\ \mathbf{v}_2^\top \mathbf{B} \\ \cdots \\ \mathbf{v}_n^\top \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

4 Par blocs colonnes $\times$ lignes :

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} = & \text{ colonne 1 de } \mathbf{A} \times \text{ ligne 1 de } \mathbf{B} \\ & + \text{ colonne 2 de } \mathbf{A} \times \text{ ligne 2 de } \mathbf{B} \\ & + \ldots \end{aligned}$$

Exemple 1 : Multiplier $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ par $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Multiplication de matrices

Remarque

Pour que le produit $\mathbf{AB}$ soit défini, il faut que

$$\text{nombre de colonnes de } \mathbf{A} = \text{nombre de lignes de } \mathbf{B}$$

Propriétés du produit matriciel

1. $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ (associativité)
2. $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ (pas commutatif)

Multiplication par blocs

Il est parfois utile d'effectuer la multiplication de matrices par blocs comme dans l'exemple suivant :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{AB} &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \mathbf{B}_{13} \\ \hline \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \mathbf{B}_{23} \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{13} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{23} \\ \hline \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{13} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{23} \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

Attention à certains pièges

- $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ n'implique pas nécessairement $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{B} = \mathbf{0}$:

  Exemple avec $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

- $\mathbf{AB} = \mathbf{B}$ avec $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ n'implique pas nécessairement $\mathbf{A} = \mathbf{I}$:

  Exemple avec $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Transposée d'une matrice

Définition

Si $\mathbf{A}$ est une matrice de taille $m \times n$ alors sa *transposée* est la matrice $\mathbf{A}^\top$ de taille $n \times m$ obtenue en interchangeant les lignes et les colonnes de $\mathbf{A}$:

$\mathbf{A}^\top(i,j) = \mathbf{A}(j,i)$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$ et $j = 1, 2, \ldots, m$

Propriétés des transposées

1. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^\top = \mathbf{A}^\top + \mathbf{B}^\top$
2. $(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$
3. Si $\mathbf{A}$ est inversible alors $\mathbf{A}^\top$ l'est aussi et $\left(\mathbf{A}^\top\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^\top$
4. $\left(\mathbf{A}^\top\right)^\top = \mathbf{A}$
5. La transposée d'une triangulaire inférieure (supérieure) est triangulaire supérieure (inférieure)

Transposée et produit scalaire

Soient $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ des vecteurs de taille n :

- $\mathbf{x}^\top \mathbf{y}$ est le *produit scalaire* de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ (c'est un réel)
- $\mathbf{y}\mathbf{x}^\top$ est le *produit extérieur* de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ (c'est une matrice de taille $n \times n$)
- $\mathbf{x}^\top \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2$

Matrices symétriques

- Une matrice **carrée** $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est *symétrique* si $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}$
- Si $\mathbf{A}$ est symétrique, $a_{ij} = a_{ji}$ pour tous $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$
- Toute matrice diagonale est symétrique
- Si $\mathbf{A}$ est symétrique et inversible alors $\mathbf{A}^{-1}$ est aussi symétrique
- Si $\mathbf{R}$ est une matrice de taille $m \times n$ alors $\mathbf{R}\mathbf{R}^\top \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et $\mathbf{R}^\top\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont des matrices carrées symétriques

Matrices de permutation

Une *matrice de permutation* est une matrice $\mathbf{P}$ obtenue en interchangeant des lignes et des colonnes de la matrice identité $\mathbf{I}$

- Il y a $n!$ matrices de permutation de taille $n \times n$
- Le produit $\mathbf{PA}$ a pour effet de permuter les lignes de $\mathbf{A}$
- Toute matrice de permutation est le produit de matrices de permutation *simples* $\mathbf{P}_{ij}$ qui chacune interchange les lignes i et j
- Si $\mathbf{P}$ est une matrice de permutation alors $\mathbf{P}^{-1}$ existe et est aussi une matrice de permutation. Elle est donnée par

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{\top}$$

- De plus, pour une matrice de permutation simple, on a

$$\mathbf{P}_{ij}^{-1} = \mathbf{P}_{ij}^{\top} = \mathbf{P}_{ij}$$

Indépendance linéaire

- Les vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ sont *linéairement indépendants* si $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \ldots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$ implique que $x_i = 0$ pour chaque $i = 1, 2, \ldots, p$
- On dit alors que la *famille* $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p)$ est *libre*
- S'il existe une combinaison linéaire des $\mathbf{v}_i$ avec des coefficients non nuls qui donne $\mathbf{0}$ alors ces vecteurs sont *linéairement dépendants* (la même famille est alors dite *liée*)
- Une famille d'au moins deux vecteurs est liée ssi au moins l'un de ses vecteurs est combinaison des autres (et pas forcément tous !)
- Avec $p \geq 2$, si $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ et si la famille est liée, alors il existe $j > 1$ tel que $\mathbf{v}_j$ est combinaison des vecteurs précédents
- Une famille contenant le vecteur nul est nécessairement liée