12. Matrices symétriques et matrices définies positives

MTH1008

Sébastien Le Digabel
Polytechnique Montréal

H2024

2023-12-18

v1

Plan

1. Matrices symétriques
2. Matrices définies positives
3. Formes quadratiques

Liens avec le livre et exercices suggérés

7.1	Diagonalisation des matrices symétriques	1, 5, 6, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 36
7.2	Formes quadratiques	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 19, 21, 23, 25, 27

Valeurs et vecteurs propres

- Une matrice est *symétrique* si $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}$
- Si $\mathbf{A}$ est une matrice symétrique alors ses valeurs propres sont réelles
- Les vecteurs propres d'une matrice symétrique qui correspondent à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux
- On peut donc choisir les vecteurs propres comme étant orthonormaux

Vecteurs propres d'une matrice symétrique 2x2

Avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

et ses deux valeurs propres λ_1 et λ_2, on a les deux vecteurs propres

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} b \\ \lambda_1 - a \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 - c \\ b \end{bmatrix}$$

Valeurs propres et pivots

- Les valeurs propres d'une matrice sont très différentes des pivots
- Le seul lien est :

$$\begin{aligned} \text{déterminant} &= \text{produit des pivots} \\ &= \text{produit des valeurs propres} \end{aligned}$$

- Pour les matrices symétriques, les pivots et les valeurs propres ont le même signe

Diagonalisation

- Si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est symétrique, elle est toujours diagonalisable sous la forme $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}^{-1}$ avec $\mathbf{S}, \mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- $\mathbf{\Lambda}$ est la matrice diagonale des valeurs propres (réelles)
- La matrice des vecteurs propres $\mathbf{S}$ contient des vecteurs orthonormaux : C'est une matrice orthogonale que l'on notera $\mathbf{Q}$ afin d'avoir

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{\top}$$

(c'est le théorème spectral)

Théorème spectral

Une matrice A est symétrique si et seulement si elle peut être factorisée sous la forme

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{Q}^\top$$

où $\mathbf{Q}$ est orthogonale et $\boldsymbol{\Lambda}$ est la matrice diagonale des valeurs propres

Exercice 1

Illustrer le théorème spectral avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Remarques

- Dans le livre, la diagonalisation $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^\top$ est appelée *diagonalisation en base orthonormée*
- Les sous-espaces propres correspondant à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux
- Pour des valeurs propres avec une MG ≥ 2, il faut s'assurer que les vecteurs propres soient orthonormaux (au besoin, utiliser GS)

Décomposition spectrale (en somme de matrices de projection)

Avec $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symétrique, on a
$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{Q}^\top =$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \dots & \mathbf{q}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^\top \\ \mathbf{q}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n^\top \end{bmatrix}$$

$$= \lambda_1 \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_1^\top + \lambda_2 \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_2^\top + \ldots + \lambda_n \mathbf{q}_n \mathbf{q}_n^\top$$

$$= \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{P}_n$$

avec $\mathbf{P}_i = \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice de projection (de rang 1) sur le vecteur propre $\mathbf{q}_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

Exercice 2

Illustrer la décomposition spectrale avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

1. Matrices symétriques

2. Matrices définies positives

3. Formes quadratiques

Définitions

- Une matrice **symétrique** $\mathbf{A}$ est *définie positive* (noté $\mathbf{A} \succ 0$) si toutes ses valeurs propres sont strictement positives
- Une matrice symétrique peut être :
  - Définie positive : $\mathbf{A} \succ 0$
  - Semi-définie positive : $\mathbf{A} \succeq 0$
  - Définie négative : $\mathbf{A} \prec 0$
  - Semi-définie négative : $\mathbf{A} \preceq 0$
  - Non-définie

Valeurs propres pour une matrice symétrique 2x2

- Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ une matrice symétrique de taille 2×2

- $\mathbf{A}$ est définie positive si ses valeurs propres sont strictement positives

- Les valeurs propres de A sont strictement positives :
  1. si et seulement si $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$
  2. si et seulement si les pivots sont positifs : $a > 0$ et $\frac{ac-b^2}{a} > 0$

- Sinon, si $a < 0$ et $|\mathbf{A}| = ac - b^2 > 0$, $\mathbf{A}$ est *définie négative* (noté $\mathbf{A} \prec 0$)

- Sinon $\mathbf{A}$ peut encore être *semi-définie positive*, *semi-définie négative*, et sinon *non-définie* (ou *indéfinie*)

L'énergie d'une matrice (forme quadratique)

- $\mathbf{A}$ est définie positive si $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ pour tout vecteur non nul $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2 > 0$$

- $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$ est donc strictement positif pour $\mathbf{A} \succ 0$ et tout $\mathbf{x}$ non nul. C'est l'*énergie* de $\mathbf{A}$ (en $\mathbf{x}$)

- Si $\mathbf{A}$ est (symétrique) définie positive, alors l'équation

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$$

représente une ellipse dont les axes pointent dans la direction des vecteurs propres et dont les longueurs sont $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$ et $\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$

Exercice 3

Quel est le signe des matrices suivantes ?

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Remarques

- Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont symétriques définies positives, alors $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ l'est aussi
- Toute matrice carrée symétrique $n \times n$ peut se décomposer en $\mathbf{A} = \mathbf{R}^\top \mathbf{R}$ avec $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Si $\mathbf{A}$ est définie positive, les colonnes de $\mathbf{R}$ sont indépendantes
- *Décomposition de Cholesky :* Si $\mathbf{A}$ est symétrique et définie positive, alors elle peut se décomposer en

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$$

avec $\mathbf{L}$ triangulaire inférieure

Sous-matrices principales

Les n *sous-matrices principales* de $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sont

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_1 &= [a_{11}] \\
\mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}_3 &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\
\vdots & \qquad \vdots \\
\mathbf{A}_k &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} \\
\vdots & \qquad \vdots \\
\mathbf{A}_n &= \mathbf{A}
\end{aligned}$$

Six énoncés équivalents pour caractériser une matrice définie positive

Pour une matrice symétrique définie positive $\mathbf{A}$ de taille $n \times n$, les énoncés suivants sont équivalents :

1. Les n pivots de $\mathbf{A}$ sont strictement positifs
2. Les n déterminants des sous-matrices principales de $\mathbf{A}$ (notés α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$) sont strictement positifs
3. Les n valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont strictement positives
4. $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ pour tout vecteur $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. C'est la définition basée sur l'énergie
5. $\mathbf{A} = \mathbf{R}^\top \mathbf{R}$, où $\mathbf{R}$ a des colonnes linéairement indépendantes
6. La décomposition de Cholesky $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$ est possible

Matrices définies négatives, semi-définies négatives, et non-définies

- La matrice symétrique $\mathbf{A}$ est *définie négative* (noté $\mathbf{A} \prec 0$) si son opposée $-\mathbf{A}$ est définie positive
- La matrice symétrique $\mathbf{A}$ est *semi-définie négative* (noté $\mathbf{A} \preceq 0$) si son opposée $-\mathbf{A}$ est semi-définie positive
- Une matrice symétrique qui n'est ni définie positive, semi-définie positive, définie négative ou semi-définie négative, est *non-définie* (ou *indéfinie*)

Exercice 4

Quel est le signe de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

et de $-\mathbf{A}$?

Matrices semi-définies positives (SDP)

- La matrice symétrique $\mathbf{A}$ est *semi-définie positive* (noté $\mathbf{A} \succeq 0$) si
$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0 \text{ pour tout } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$
- Toutes les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont ≥ 0
- Toute matrice définie positive est également semi-définie positive
- Si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, alors $\mathbf{A}^\top \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est symétrique et SDP

Matrices SDP et sous-matrices

- Le test basé sur les déterminants des sous-matrices principales (les α_i) ne fonctionne pas pour déterminer si une matrice est SDP
- Si un de ces α_i est égal à zéro, alors la matrice peut être SDP ou indéfinie
- Pour vérifier qu'une matrice est SDP, il faut montrer que les déterminants de toutes les sous-matrices carrées sont ≥ 0
- Voir le critère de Sylvester vu dans le cours de Calcul

Application : Optimisation (rappel)

Soit $f(\mathbf{x})$ une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

- Les points stationnaires (ou critiques) de f sont les points $\mathbf{x}^*$ tels que $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$
- Si $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)$ (la *matrice hessienne* en $\mathbf{x}^*$ critique) est :
  - définie positive : $\mathbf{x}^*$ est un *minimum local* de f
  - définie négative : $\mathbf{x}^*$ est un *maximum local* de f
  - non-définie : $\mathbf{x}^*$ est un *point de selle* (ou *point-col*)
- Si $\nabla^2 f(\mathbf{x})$, **pour tout** $\mathbf{x}$, est :
  - semi-définie positive : f est *convexe* et $\mathbf{x}^*$ est un *minimum global* de f
  - semi-définie négative : f est *concave* et $\mathbf{x}^*$ est un *maximum global* de f

1. Matrices symétriques

2. Matrices définies positives

3. Formes quadratiques

Définition

Une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ est une application de la forme

$$\begin{array}{rcl} Q : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} & \mapsto & Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \end{array}$$

avec $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symétrique. $Q(\mathbf{x})$ est donc l'application qui donne l'énergie de $\mathbf{A}$

Exercice 5 : Trouver la matrice associée à

$$Q(\mathbf{x}) = 5x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 + 8x_2x_3$$

Changement de variable avec une forme quadratique

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symétrique avec $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^\top$

Si on effectue le changement de variable

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y} \text{ ou } \mathbf{y} = \mathbf{Q}^\top\mathbf{x}$$

Alors la forme quadratique $Q(\mathbf{x})$ devient

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^\top\mathbf{\Lambda}\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^2$$

Exercice 6

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$ et sa forme quadratique associée Q

Définir un changement de variable qui permette d'exprimer Q sans produits croisés de variables. Illustrer avec $Q(2, -2)$

Remarques

- Les colonnes de $\mathbf{Q}$ sont appelées les axes principaux de la forme quadratique Q
- Voir leur interprétation géométrique dans le livre (pages 436 et 437)
- Attention aux termes du livre : voir page 438