

MTH1008 — Algèbre linéaire appliquée

Série 10 : Orthogonalité

Exercices (énoncés)

Les numéros renvoient au manuel [alfa](#) (série d'exercices.numéro).

Exercice 5.34 (★★)

Soient $V = \text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ et $W = \text{Vect}\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_p\}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Le but est de montrer que :

$$V \perp W \Leftrightarrow \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \perp \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_p\}$$

Partie 1 : Supposons $V \perp W$.

1. Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, p\}$, $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_j \rangle = 0$.
2. En déduire que $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \perp \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_p\}$.

Partie 2 : Supposons maintenant $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \perp \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_p\}$.

1. Soient $\mathbf{v} \in V$ et $\mathbf{w} \in W$, montrer qu'il existe $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_p)$ tels que :

$$\mathbf{v} = a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + a_n \mathbf{v}_n, \quad \mathbf{w} = b_1 \mathbf{w}_1 + \dots + b_p \mathbf{w}_p$$

2. Utiliser ces expressions pour montrer que $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$.
3. Conclure que $V \perp W$.

Exercice 5.35 (★★)

Soit $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et

$$\mathbf{O} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n]$$

la matrice correspondante.

1. Montrer que $\mathbf{O}^\top \mathbf{v}_i = \mathbf{e}_i$, où $\mathbf{e}_i$ est le i -ième vecteur de la base canonique.
2. Sachant que $\mathbf{O}^\top \mathbf{O} = [\mathbf{O}^\top \mathbf{v}_1 \quad \dots \quad \mathbf{O}^\top \mathbf{v}_n]$, conclure que $\mathbf{O}^\top \mathbf{O} = \mathbf{I}$. En fait :

$$\mathbf{O} \text{ est orthogonale} \Leftrightarrow \mathbf{O}^\top \mathbf{O} = \mathbf{I}$$

3. Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|\mathbf{v}\| = 1$, montrer que $\mathbf{H} = \mathbf{I} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^\top$ est orthogonale.
4. Montrer que $\mathbf{H}$ est aussi symétrique.
5. Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux matrices orthogonales et symétriques telles que $\mathbf{AB} = -\mathbf{BA}$, montrer que $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ est orthogonale et symétrique.

Exercice 5.36 (★★)

1. Vérifier si la famille $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ avec

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

est orthogonale.

2. Cette famille forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
3. Cette famille forme-t-elle une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 5.37 (★★)

1. Vérifier si la famille $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ avec

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

est orthogonale et si c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5.38 (★★)

1. La famille $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ de $\mathbb{R}^4$ est-elle orthogonale si

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ?$$

2. Cette famille forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^4$?
3. Cette famille forme-t-elle une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 5.39 (★★)

1. Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ avec

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

est-elle orthogonale ?

Exercice 5.40 (★★)

1. Vérifier l'orthogonalité de la famille $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ où

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 5.41 (★★)

1. La famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ avec

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$$

est-elle orthogonale ?

2. Est-ce une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 5.42 (★★)

Soient les vecteurs

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- a) Ces vecteurs sont-ils orthogonaux ?
- b) Forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
- c) Forment-ils une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 6.13 (★)

1. Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Vérifier que $\text{Im}(\mathbf{A})$ et $\text{Ker}(\mathbf{A}^\top)$ sont orthogonaux en explicitant une base de chaque sous-espace.

Exercice 6.14 (★)

1. Avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

montrer que $\text{Im}(\mathbf{A}) \perp \text{Ker}(\mathbf{A}^\top)$ et donner une base de chaque sous-espace.

Exercice 6.15 (★★)

Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Vérifier que $\text{Im}(\mathbf{A}^\top)$ et $\text{Ker}(\mathbf{A})$ sont orthogonaux en explicitant une base de chacun de ses sous-espaces.
- Donner le projection de $\mathbf{x} = (4, 0, 2)$ sur $\text{Ker}(\mathbf{A})$, et vérifier qu'elle appartient bien à $\text{Ker}(\mathbf{A})$.
- Donner le projection de $\mathbf{x} = (4, 0, 2)$ sur $\text{Im}(\mathbf{A}^\top)$, et vérifier qu'elle appartient bien à $\text{Im}(\mathbf{A}^\top)$.
- Vérifier que la somme de ces deux projections donne $\mathbf{x}$.

Exercice 6.25 image et noyau d'une matrice symétrique (★★)

Soit $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique, c'est-à-dire $\mathbf{M}^\top = \mathbf{M}$. On souhaite établir pas à pas la propriété fondamentale :

$$\text{Im}(\mathbf{M}) = \text{Ker}(\mathbf{M})^\perp.$$

sans utiliser le théorème « Orthogonalité des sous-espaces fondamentaux ».

- Montrer que $\text{Im}(\mathbf{M}) \subseteq \text{Ker}(\mathbf{M})^\perp$.
- Comparer les dimensions de $\text{Im}(\mathbf{M})$ et de $\text{Ker}(\mathbf{M})^\perp$.
- Conclure que $\text{Im}(\mathbf{M}) = \text{Ker}(\mathbf{M})^\perp$.

Exercice 9.2 projection sur une famille non orthogonale (★★)

Soient $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ deux vecteurs d'un espace vectoriel quelconque, et notons $W = \text{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$. Le but de cette question est de montrer par un contre-exemple simple dans $\mathbb{R}^3$, que si la famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ n'est pas orthogonale, la décomposition de la projection orthogonale sous la forme

$$\text{Proj}_W(\mathbf{x}) = \text{Proj}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{x}) + \text{Proj}_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{x})$$

n'est plus valide. Soient

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

ainsi que $W = \text{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$.

1. Vérifier que la famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ n'est pas orthogonale.
2. Calculer le vecteur suivant, dont il faut montrer qu'il *n'est pas* égal à $\text{Proj}_W(\mathbf{x})$:

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \text{Proj}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{x}) + \text{Proj}_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{x}).$$

3. Calculer $\text{dist}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}_1)$.
4. Vérifier que

$$\hat{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} 8/3 \\ 1/3 \\ 7/3 \end{bmatrix} \in L$$

et calculer $\text{dist}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}_2)$.

5. Conclure de ce qui précède, que $\hat{\mathbf{x}}_1$ n'est pas le projeté orthogonal de $\mathbf{x}$ sur W .

Exercice 9.3 (★)

Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soient également $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tels que $\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = 2\sqrt{2}$ et $\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{w}') = 2\sqrt{3}$. Est-il possible que $\text{Proj}_W(\mathbf{x}) = \mathbf{w}'$?

Exercice 9.4 matrice de projection sur une image (★★)

Soient $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et l'application linéaire

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^m &\longrightarrow \text{Im}(\mathbf{A}) \\ \mathbf{y} &\longmapsto \text{Proj}_{\mathbf{A}}(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

En supposant que $\text{rg}(\mathbf{A}) = n$, montrer que la matrice représentant T dans la base canonique est $\mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top$.

Exercice 9.5 (★)

On note $W = \text{Vect}(\mathbf{u})$. Calculer à chaque fois le projeté orthogonal de $\mathbf{x}$ sur W puis $\text{dist}(\mathbf{x}, W)$.

1. $\mathbf{x} = (0, 1)$, $\mathbf{u} = (-1, 1)$;
2. $\mathbf{x} = (2, 2, 0)$, $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$;
3. $\mathbf{x} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{u} = (0, 1, 0)$;
4. $\mathbf{x} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{u} = (0, 0, 0) = \mathbf{0}_3$.

Exercice 9.6 (★)

On note $W = \text{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$. Calculer à chaque fois le projeté orthogonal de $\mathbf{x}$ sur W puis $\text{dist}(\mathbf{x}, W)$.

1. $\mathbf{x} = (1, 1, 2)$, $\mathbf{u}_1 = (2, 0, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 0, -2)$;
2. $\mathbf{x} = (1, 2, 2)$, $\mathbf{u}_1 = (0, 2, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 0, 1)$.

Exercice 9.7 (★★)

On note $W = \text{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$. Calculer à chaque fois le projeté orthogonal de $\mathbf{x}$ sur W puis $\text{dist}(\mathbf{x}, W)$.

1. $\mathbf{x} = (4, 2, 2, -1)$, $\mathbf{u}_1 = (1, 1, -1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (3, 3, -2, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (3, 1, 4, -4)$;
2. $\mathbf{x} = (0, 2, -1, 4)$, $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 1, -1, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (0, -1, 2, 1)$.

Exercice 9.8 (★★)

On note $W = \text{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$. Calculer à chaque fois le projeté orthogonal de $\mathbf{x}$ sur W .

1. $\mathbf{x} = (1, 1, 2)$, $\mathbf{u}_1 = (2, 0, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 0, -2)$, $\mathbf{u}_3 = (3, 0, -1)$;
2. $\mathbf{x} = (1, 2, 2)$, $\mathbf{u}_1 = (0, 2, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 0, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (-1, -4, -1)$.

Exercice 9.9 (★★)

Calculer le projeté orthogonal de $\mathbf{x}$ sur W avec :

1. $\mathbf{x} = (1, 1)$, $W = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 : 2w_1 + w_2 = 0\}$;
2. $\mathbf{x} = (1, 1, 2)$, $W = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 : w_1 + w_2 = 0\}$;
3. $\mathbf{x} = (-1, 3, 1, 2)$, $W = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^4 : w_2 + 2w_3 - w_4 = 0\}$.

Exercice 9.10 (★)

Soient $\mathbf{x} = (1, -2, 1)$ et $W = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 : w_1 + w_2 + w_3 = 0\}$. Calculer $\text{dist}(\mathbf{x}, W)$.

Exercice 9.11 (★★)

Soit V un espace vectoriel quelconque.

1. Soient $p \in \mathbb{N}$, $p \leq \dim(V)$ et $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p)$ une famille orthogonale de V avec $\mathbf{u}_i \neq \mathbf{0}$, $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$. On note $W = \text{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p)$ et $P : \mathbf{x} \in V \mapsto P(\mathbf{x}) = \text{Proj}_W(\mathbf{x})$. Montrer que P est une application linéaire.
2. [Une légère extension.] Soient W un sous-espace vectoriel quelconque de V et $P : \mathbf{x} \in V \mapsto P(\mathbf{x}) = \text{Proj}_W(\mathbf{x})$. Montrer que P est une application linéaire.

Exercice 9.13 (★★)

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telle que $\text{rg}(\mathbf{A}) = n \leq m$. On note $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ la matrice de projection orthogonale sur $\text{Im}(\mathbf{A})$.

1. Montrer que $\text{Ker}(\mathbf{P}) = (\text{Im}(\mathbf{A}))^\perp$.
2. En déduire que $\text{rg}(\mathbf{P}) = n$.

Exercice 9.14 (**)

Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur normalisé. Montrer que la matrice associée à la projection orthogonale sur $\text{Vect}(\mathbf{u})$ est donnée par $\mathbf{u}\mathbf{u}^\top$.