Annexe 2: Application: Ressorts en série et tige élastique

Section 8.1

MTH1007

J. Guérin, N. Lahrichi, S. Le Digabel
Polytechnique Montréal

H2023

(v1)

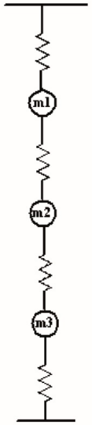
Plan

1. Ressorts en série

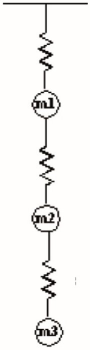
2. Tige élastique

Exemples de montages de ressorts en série

- 3 masses
- 4 ou 3 ressorts
- On veut des équations pour le déplacement des masses ($\mathbf{u}$) et les tensions dans les ressorts ($\mathbf{y}$)



fixé-fixé



fixé-libre

Définitions pour le cas général du montage en série

- $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$: déplacement de n masses. Positions verticales et positives si déplacement vers le bas
- $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$: forces internes de m ressorts. Positives si tension et négatives si compression
- $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_m)$: allongement des ressorts
- $\mathbf{f} = (m_1, m_2, \ldots, m_n)g$: forces externes sur les n masses
- $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_m)$: constantes des ressorts. Forment les éléments diagonaux de $C \in \mathbb{R}^{m\times m}$
- $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$: Matrice de différences
- $K \in \mathbb{R}^{n\times n}$: Matrice de rigidité avec $K = A^\top C A$

Relations

$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$, $C \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, et $K = A^\top C A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

- **Loi de Hooke (ou loi constitutive) :**
  Force d'étirement = constante du ressort × distance d'étirement :
  $$\mathbf{y} = C\mathbf{e}$$
- **Équation cinématique :**
  $$\mathbf{e} = A\mathbf{u}$$
- **Équilibre des forces :**
  $$\mathbf{f} = A^\top \mathbf{y} = A^\top C\mathbf{e} = A^\top C A\mathbf{u} = K\mathbf{u}$$

Cas fixé-fixé avec $n = 3$ masses et $m = 4$ ressorts

Les relations entre allongements des ressorts et déplacement des masses : $e_1 = u_1$, $e_2 = u_2 - u_1$, $e_3 = u_3 - u_2$ et $e_4 = -u_3$, permettent de définir

$$A = A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$$

La matrice de rigidité est alors

$$K = K_0 = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

(tridiagonale, symétrique, définie-positive, inversible)

Exemple 1

Pour le cas fixé-fixé avec $n = 3$ masses et $m = 4$ ressorts, exprimer les déplacements $\mathbf{u}$, les allongements $\mathbf{e}$ lorsque
$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c$ et $m_1 = m_2 = m_3 = m$

Cas fixé-libre avec $n = 3$ masses et $m = 3$ ressorts

Les relations entre allongements des ressorts et déplacement des masses : $e_1 = u_1$, $e_2 = u_2 - u_1$, et $e_3 = u_3 - u_2$, permettent de définir

$$A = A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

La matrice de rigidité est alors

$$K = K_1 = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

(K_0 avec $c_4 = 0$; Tridiagonale, symétrique, définie-positive, inversible)

Exemple 2

Pour le cas fixé-libre avec $n = 3$ masses et $m = 3$ ressorts, exprimer les déplacements $\mathbf{u}$, les allongements $\mathbf{e}$ lorsque $c_1 = c_2 = c_3 = c$ et $m_1 = m_2 = m_3 = m$

Cas libre-libre avec $n = 3$ masses et $m = 2$ ressorts

- Les relations entre allongements des ressorts et déplacement des masses : $e_1 = u_2 - u_1$ et $e_2 = u_3 - u_2$ permettent de définir

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

- A est de rang 2 et $(1, 1, 1)$ génère son noyau. On peut donc avoir des déplacements $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ des masses qui n'étirent pas les ressorts : $\mathbf{e} = A\mathbf{u} = \mathbf{0}$
- La matrice de rigidité est

$$K = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

- K est de rang 2 et ne peut s'inverser

1. Ressorts en série

2. Tige élastique

Introduction

- La série de ressorts devient une tige solide élastique en considérant plusieurs petites masses de plus en plus proches (N morceaux de longueur Δx)
- Travail personnel : Lire les pages 418 à 420