# Annexe 1: Application: Graphes et réseaux

## Section 8.2

MTH1007

J. Guérin, N. Lahrichi, S. Le Digabel
Polytechnique Montréal

H2023

(v1)

# Plan

1. La théorie des graphes

2. Graphes et algèbre linéaire

# Problèmes célèbres de la théorie des graphes

- Problème des ponts de Königsberg ($18^{\text{ème}}$ siècle) : *peut-on imaginer une promenade dans la ville en empruntant chacun de ses 7 ponts une fois et une seule pour revenir à son point de départ ?*
- Problème du plus court chemin (algorithme de Dijkstra), problème du flot maximal, problème de la coupe maximale, problème de couplage
- Problème du voyageur de commerce (TSP) : $\mathcal{NP}$-difficile ; ne peut être résolu qu'avec des *heuristiques*, pour des tailles modestes
- Coloration des sommets ou des arêtes d'un graphe
- Théorème des quatre couleurs

# Domaines d'application de la théorie des graphes

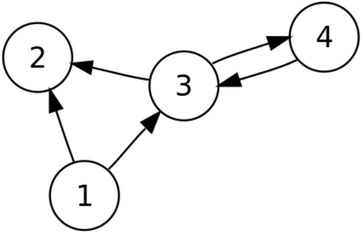
- De nombreux problèmes discrets peuvent se modéliser avec des graphes
- Tous les domaines où la notion de réseau intervient : problèmes d'ordonnancement, de transport, de flots, etc.
- Informatique, télécommunications, réseaux sociaux
- Gestion d'horaires, planification de tâches, etc.

# Définition d'un graphe

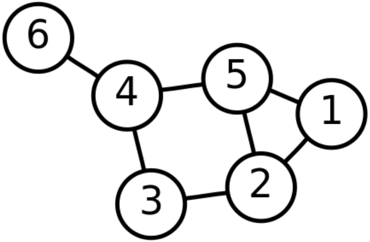
- Un *graphe* est constitué d'un ensemble de *noeuds* ou *sommets* reliés entre eux par des *liens* appelés :
  - *arêtes* dans le cas des graphes *non-orientés*
  - ou *arcs* dans le cas des graphes *orientés*
- Deux sommets reliés sont appelés *adjacents*
- Des *poids* peuvent être associés aux arêtes (arcs). Ces poids peuvent être des coûts, des distances, une conductivité, etc.
- Un graphe est noté $G = (V, E)$ avec $V$ l'ensemble des sommets et $E$ l'ensemble des arêtes (arcs)
- La *théorie des graphes* est le domaine des mathématiques qui étudie les graphes

# Représentation d'un graphe

Un graphe se représente graphiquement de la façon suivante :




Graphe orienté




Graphe non-orienté

(pris de Wikipedia)

# Quelques types de graphes

- Un *graphe complet* est un graphe dont tous les sommets sont adjacents. Une *clique* est un sous-ensemble de sommets adjacents. Un graphe complet possède $n(n-1)/2$ arêtes (arcs), si $|V| = n$

- Un *arbre* est un graphe non-orienté, acyclique et connexe (connexe : il existe un chemin entre toute paire de sommets). Un arbre possède $n-1$ arêtes (arcs), si $|V| = n$

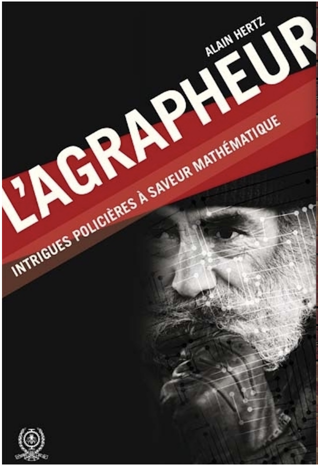
- Une graphe est *biparti* quand on peut séparer les sommets en deux ensembles dans lesquels il n'y a aucune arête

- Un graphe est *planaire* quand on peut le représenter dans un plan sans qu'il y ait intersection d'arêtes

# Cours avec des graphes à Polytechnique

| Sigle | Titre (cliquez pour les détails) |
|---|---|
| INF8775 | Analyse et conception d'algorithmes |
| LOG3210 | Éléments de langages et compilateurs |
| MTH8415 | Fondements de recherche opérationnelle |
| MTH8410 | Méthodes d'optimisation pour les services |
| MTH2402 | Recherche opérationnelle |
| MIN3510 | Recherche opérationnelle minière |
| INF2010 | Structures de données et algorithmes |
| LOG2810 | Structures discrètes |
| MTH6405 | Théorie des graphes et des réseaux |

# Romans de graphes...





# Matrice d'incidence

Soit un graphe orienté $G = (V, E)$ avec $|V| = n$ sommets et $|E| = m$ arcs. On note $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ et $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ avec $e_i = (v, w)$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ et $v, w \in V$

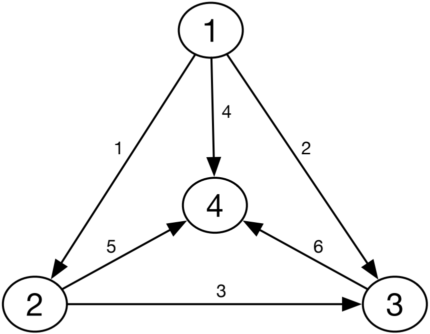
- La *matrice d'incidence* est définie par $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ avec

$$a_{i,j} = \begin{cases} -1 \text{ si } e_i = (v_j, w) \in E, \text{ avec } w \in V \\ +1 \text{ si } e_i = (w, v_j) \in E, \text{ avec } w \in V \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

  avec $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ et $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$
- Chaque ligne (arc) comprend un $-1$ et un $+1$
- On ne peut pas représenter d'arcs de la forme $(v, v)$ ou des arcs multiples
- Pour représenter des poids sur les arcs, remplacer les valeurs $\pm 1$ par les poids $\pm w_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$

# Exemple

Donner la matrice d'incidence du graphe suivant, ainsi que sa forme échelonnée $U$, et sa forme échelonnée réduite $R$




Noter que $U$ est la matrice d'incidence d'un arbre (sans tenir compte de l'orientation)

# Propriétés

- Les arcs qui constituent une boucle correspondent à des lignes dépendantes de la matrice d'incidence
- Les lignes indépendantes forment des arbres
- L'élimination réduit tout graphe en un arbre (orienté)
- Comme le nombre d'arêtes d'un arbre est $n-1$, le rang de $A$ est $r(A) = n-1$
- Si on considère que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ correspond à des *potentiels* à chaque sommet, alors $A\mathbf{x}$ représente un vecteur de différences de potentiels (un *flux*) à chaque arc

# Noyau

- $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ correspond à des flux nuls, et donc des potentiels égaux à chaque sommet
- Chaque $\mathbf{x}$ du noyau est de la forme $\mathbf{x} = k(1, 1, \ldots, 1)$, $k \in \mathbb{R}$
- Le noyau est de dimension 1 car $\dim N(A) = n - r(A) = n - (n-1) = 1$
- La solution spéciale est $\mathbf{s} = (1, 1, \ldots, 1)$
- Le noyau est une droite dans $\mathbb{R}^n$

# Espace des lignes

- L'espace des lignes est de dimension $n-1$ dans $\mathbb{R}^n$ :
$\dim C(A^\top) = r(A) = n-1$
- Les $r$ lignes pivots de $A$ correspondent aux arêtes de l'arbre représenté par $U$. Les lignes suivantes forment des boucles
- $\mathbf{e} \in C(A^\top)$ si $\mathbf{e}$ est perpendiculaire à la solution spéciale du noyau $\mathbf{s} = (1, 1, \ldots, 1)$, c'est-à-dire que la somme de ses composantes est nulle

# Espace des colonnes

- L'espace des colonnes est de dimension $n-1$ dans $\mathbb{R}^m$ : $\dim C(A) = r(A) = n-1$
- C'est l'ensemble de tous les $A\mathbf{x}$ possibles
- *Loi des mailles :* La somme des composantes de $A\mathbf{x}$ est zéro autour de chaque boucle
- Équivalent à : $\mathbf{b} \in C(A)$ si pour toutes les boucles, ses composantes obéissent à la *loi de Kirchhoff* :

$$\sum_{i:e_i \text{ de sens } 1} b_i - \sum_{i:e_i \text{ de sens } 2} b_i = 0$$

- Illustrer sur l'exemple

# Noyau à gauche

- Le noyau à gauche est de dimension $m - r = m - n + 1$ dans $\mathbb{R}^m$. Ce chiffre correspond au nombre de boucles indépendantes du graphe
- Ce sont les vecteurs $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ (une composante par arc) tels que $A^\top \mathbf{y} = \mathbf{0}$. Chaque équation de ce système signifie qu'au noeud (sommet) correspondant, le flux entrant est égal au flux sortant. C'est la *loi des noeuds*
- On obtient les solutions $A^\top \mathbf{y} = \mathbf{0}$ à l'aide des boucles indépendantes (les *petites boucles*) : Chacune donne une solution spéciale du noyau à gauche, avec $y_i = \pm 1$
- Illustrer sur l'exemple

# Travail personnel

Lire les pages 428 à 430