

9. Orthogonalité

MTH1007

Sébastien Le Digabel
Polytechnique Montréal

A26

2026-07-16

v0

Plan

1. Orthogonalité

- Vecteurs orthogonaux
- Sous-espaces orthogonaux
- Complément orthogonal
- Portrait global : mise à jour

2. Matrices orthogonales et bases orthonormales

- Vecteur orthonormaux et matrice orthogonales

3. Diagonalisation des matrices symétriques

- Diagonalisation des matrices symétriques
- Théorème spectral
- Décomposition spectrale

Liens avec le manuel *alfa*

- ▶ 5.3 : Orthogonalité
- ▶ 11.2 : Diagonalisation des matrices symétriques

1. Orthogonalité

- Vecteurs orthogonaux
- Sous-espaces orthogonaux
- Complément orthogonal
- Portrait global : mise à jour

2. Matrices orthogonales et bases orthonormales

- Vecteur orthonormaux et matrice orthogonales

3. Diagonalisation des matrices symétriques

- Diagonalisation des matrices symétriques
- Théorème spectral
- Décomposition spectrale

Vecteurs orthogonaux

- ▶ Deux vecteurs (réels ou complexes) $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont *orthogonaux* si leur produit scalaire est nul : $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$
- ▶ Dans ce cas, on note $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, et on a
 - ▶ $\mathbf{u}^\top \mathbf{v} = 0$ si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont réels
 - ▶ $\mathbf{u}^* \mathbf{v} = 0$ si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont complexes
 - ▶ $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{w}\|^2$

Sous-espaces orthogonaux

- ▶ Deux sous-espaces U et V (d'un même espace vectoriel) sont *orthogonaux* si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ pour chaque vecteur $\mathbf{u} \in U$ et chaque vecteur $\mathbf{v} \in V$
- ▶ Autrement dit, tous les vecteurs de U sont orthogonaux à tous les vecteurs de V (et vice versa)
- ▶ On note $U \perp V$

Remarques

- ▶ Si U et V sont des sous-espaces orthogonaux alors leur seul vecteur commun est le vecteur nul 0
- ▶ Si U et V sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) tels que $\dim U + \dim V > n$, alors ils ne peuvent pas être orthogonaux
- ▶ Ainsi, par exemple, deux plans de $\mathbb{R}^3$ ne peuvent pas être des sous-espaces orthogonaux

Théorèmes

- ▶ Si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ alors le noyau $\text{Ker}(\mathbf{A})$ et l'espace des lignes $\text{Im}(\mathbf{A}^\top)$ sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux de $\mathbb{R}^n$:

$$\text{Ker}(\mathbf{A}) \perp \text{Im}(\mathbf{A}^\top)$$

- ▶ Si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ alors le noyau à gauche $\text{Ker}(\mathbf{A}^\top)$ et l'image $\text{Im}(\mathbf{A})$ sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux de $\mathbb{R}^m$:

$$\text{Ker}(\mathbf{A}^\top) \perp \text{Im}(\mathbf{A})$$

Complément orthogonal

Définition

Le *complément orthogonal* (ou l'*orthogonal*) d'un sous-espace vectoriel V est le sous-espace $V^\perp$ contenant **tous** les vecteurs orthogonaux à V

Théorème

Si V est un sous-espace vectoriel de W alors

$$\dim V + \dim V^\perp = \dim W$$

Théorèmes

- ▶ Si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ alors le noyau $\text{Ker}(\mathbf{A})$ est le complément orthogonal de l'espace des lignes $\text{Im}(\mathbf{A}^\top)$, dans $\mathbb{R}^n$:

$$\text{Im}(\mathbf{A}^\top) = \text{Ker}(\mathbf{A})^\perp \text{ et } \text{Ker}(\mathbf{A}) = \text{Im}(\mathbf{A}^\top)^\perp$$

- ▶ Si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ alors le noyau à gauche $\text{Ker}(\mathbf{A}^\top)$ est le complément orthogonal de l'image $\text{Im}(\mathbf{A})$, dans $\mathbb{R}^m$:

$$\text{Im}(\mathbf{A}) = \text{Ker}(\mathbf{A}^\top)^\perp \text{ et } \text{Ker}(\mathbf{A}^\top) = \text{Im}(\mathbf{A})^\perp$$

Raison d'être des compléments

Avec une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

- ▶ Tout vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ peut se décomposer de façon unique comme

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_r + \mathbf{x}_n$$

avec $\mathbf{x}_r \in \text{Im}(\mathbf{A}^\top)$ et $\mathbf{x}_n \in \text{Ker}(\mathbf{A})$

- ▶ Tout vecteur $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ peut se décomposer de façon unique comme

$$\mathbf{b} = \mathbf{p} + \mathbf{e}$$

avec $\mathbf{p} \in \text{Im}(\mathbf{A})$ et $\mathbf{e} \in \text{Ker}(\mathbf{A}^\top)$

Exemple

Avec

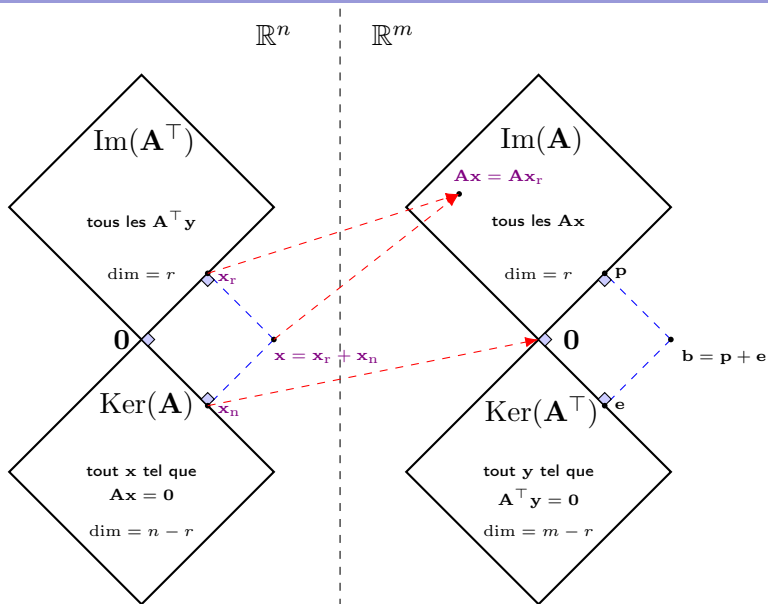
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

on a

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_r + \mathbf{x}_n$$

avec $\mathbf{x} = (4, 3)$, $\mathbf{x}_r = (2, 4) \in \text{Im}(\mathbf{A}^\top)$, et $\mathbf{x}_n = (2, -1) \in \text{Ker}(\mathbf{A})$

$\implies$ on calcule $\mathbf{x}_r$ et $\mathbf{x}_n$ par des *projections* de $\mathbf{x}$ sur $\text{Im}(\mathbf{A}^\top)$ et $\text{Ker}(\mathbf{A})$



1. Orthogonalité

Vecteurs orthogonaux
Sous-espaces orthogonaux
Complément orthogonal
Portrait global : mise à jour

2. Matrices orthogonales et bases orthonormales

Vecteur orthonormaux et matrice orthogonales

3. Diagonalisation des matrices symétriques

Diagonalisation des matrices symétriques
Théorème spectral
Décomposition spectrale

Vecteur orthonormaux

- ▶ Les vecteurs $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$ de $\mathbb{R}^m$ (avec $n \leq m$) sont *orthonormaux* si

$$\mathbf{q}_i^\top \mathbf{q}_j = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } i \neq j \text{ (orthogonalité)} \\ 1 & \text{lorsque } i = j \text{ (vecteurs } \textit{unitaires}) \end{cases}$$

pour tous les $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$

- ▶ Géométriquement, les vecteurs sont de longueur un et orthogonaux entre eux
- ▶ Si deux vecteurs *non nuls* sont orthogonaux, alors ils sont indépendants

Familles et bases orthogonales / orthonormales

Soit une famille $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p)$ de $\mathbb{R}^n$ et $V = \text{Vect}(\mathcal{B})$

- ▶ Si les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont orthogonaux¹, alors $\mathcal{B}$ est appelée une **famille orthogonale**, et si $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$ pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, alors $\mathcal{B}$ est une **base orthogonale** de V
- ▶ Si les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont orthonormaux, alors $\mathcal{B}$ est appelée une **famille orthonormale**, et $\mathcal{B}$ est une **base orthonormale** de V

1. “entre eux” est implicite

Matrices orthogonales (1/2)

- ▶ Si les colonnes de la matrice $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{q}_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sont orthonormales alors $\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} = \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- ▶ La matrice $\mathbf{Q}$ n'est pas nécessairement carrée :
 $\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} = \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mais $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\top \in \mathbb{R}^{m \times m} \neq \mathbf{I}$
- ▶ Dans le cas où $\mathbf{Q}$ est carrée alors on dit que c'est une *matrice orthogonale* et on a $\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^\top = \mathbf{I}$, et donc $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^\top$
- ▶ Les colonnes d'une matrice orthogonale forment une base de $\mathbb{R}^n$. C'est une *base orthonormale*

Matrices orthogonales (2/2)

- ▶ Une matrice orthogonale $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ préserve le produit scalaire : Pour tous vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\langle \mathbf{Q}\mathbf{x}, \mathbf{Q}\mathbf{y} \rangle = (\mathbf{Q}\mathbf{x})^\top (\mathbf{Q}\mathbf{y}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} \mathbf{y} = \mathbf{x}^\top \mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

- ▶ Géométriquement, ceci signifie que les longueurs et les angles sont préservés
- ▶ $\|\mathbf{Q}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

Matrices orthogonales : Exemples

- ▶ La matrice orthogonale la plus évidente est l'**identité** : $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$
- ▶ Matrices de **rotation** : $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$
- ▶ Les matrices de **permutation** sont orthogonales
- ▶ Matrices de **réflexion** : Si $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ unitaire, on définit $\mathbf{Q}$ par la *transformation de Householder* :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$\mathbf{Q}$ est symétrique, orthogonale, et $\mathbf{Q}^2 = \mathbf{I}$. Noter aussi que $\mathbf{u}$ ne reste pas obligatoirement comme une colonne de $\mathbf{Q}$

Exemples avec $\mathbf{u}_1 = (-1, 0)$ et $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$

1. Orthogonalité

Vecteurs orthogonaux
Sous-espaces orthogonaux
Complément orthogonal
Portrait global : mise à jour

2. Matrices orthogonales et bases orthonormales

Vecteur orthonormaux et matrice orthogonales

3. Diagonalisation des matrices symétriques

Diagonalisation des matrices symétriques
Théorème spectral
Décomposition spectrale

Diagonalisation

- ▶ Si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est symétrique, elle est toujours diagonalisable sous la forme $\mathbf{A} = \mathbf{\Sigma} \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Sigma}^{-1}$ avec $\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- ▶ $\mathbf{\Lambda}$ est la matrice diagonale des valeurs propres (réelles)
- ▶ La matrice des vecteurs propres $\mathbf{\Sigma}$ contient des vecteurs orthonormaux : C'est une matrice orthogonale que l'on renomme $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{Q}$ afin d'avoir

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^T$$

(c'est le **théorème spectral**)

Théorème spectral

Une matrice $\mathbf{A}$ est symétrique si et seulement si elle peut être factorisée sous la forme

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^\top$$

où $\mathbf{Q}$ est orthogonale et $\mathbf{\Lambda}$ est la matrice diagonale des valeurs propres

Exercice 1

Illustrer le théorème spectral avec

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Remarques

- ▶ Dans le manuel, la diagonalisation $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^T$ est appelée *diagonalisation en base orthonormée*
- ▶ Les sous-espaces propres correspondant à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux
- ▶ Pour $\lambda \in \text{Sp}(\mathbf{A})$ avec $\mu_{\mathbf{A}}^g(\lambda) \geq 2$, il faut s'assurer que les vecteurs propres soient orthonormaux (au besoin, utiliser Gram-Schmidt)

Décomposition spectrale : somme de projections

Avec $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symétrique, on a

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^\top =$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \dots & \mathbf{q}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^\top \\ \mathbf{q}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n^\top \end{bmatrix}$$

$$= \lambda_1 \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_1^\top + \lambda_2 \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_2^\top + \dots + \lambda_n \mathbf{q}_n \mathbf{q}_n^\top$$

$$= \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{P}_n$$

avec $\mathbf{P}_i = \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice de projection (de rang 1) sur le vecteur propre $\mathbf{q}_i$, $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$