

MTH1007 — Algèbre linéaire pour ingénieurs

Série 9 : Orthogonalité

Exercices (énoncés)

Les numéros renvoient au manuel [alfa](#) (série d'exercices.numéro).

Exercice 5.35 (★★)

Soit $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et

$$\mathbf{O} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n]$$

la matrice correspondante.

1. Montrer que $\mathbf{O}^\top \mathbf{v}_i = \mathbf{e}_i$, où $\mathbf{e}_i$ est le i -ième vecteur de la base canonique.
2. Sachant que $\mathbf{O}^\top \mathbf{O} = [\mathbf{O}^\top \mathbf{v}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{O}^\top \mathbf{v}_n]$, conclure que $\mathbf{O}^\top \mathbf{O} = \mathbf{I}$. En fait :

$$\mathbf{O} \text{ est orthogonale} \Leftrightarrow \mathbf{O}^\top \mathbf{O} = \mathbf{I}$$

3. Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|\mathbf{v}\| = 1$, montrer que $\mathbf{H} = \mathbf{I} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^\top$ est orthogonale.
4. Montrer que $\mathbf{H}$ est aussi symétrique.
5. Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux matrices orthogonales et symétriques telles que $\mathbf{AB} = -\mathbf{BA}$, montrer que $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ est orthogonale et symétrique.

Exercice 5.36 (★★)

1. Vérifier si la famille $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ avec

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

est orthogonale.

2. Cette famille forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
3. Cette famille forme-t-elle une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 5.37 (★★)

1. Vérifier si la famille $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ avec

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

est orthogonale et si c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5.38 (★★)

1. La famille $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ de $\mathbb{R}^4$ est-elle orthogonale si

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ?$$

2. Cette famille forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^4$?
3. Cette famille forme-t-elle une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 5.39 (★★)

1. Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ avec

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

est-elle orthogonale ?

Exercice 5.40 (★★)

1. Vérifier l'orthogonalité de la famille $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ où

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 5.41 (★★)

1. La famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ avec

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$$

est-elle orthogonale ?

2. Est-ce une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 5.42 (★★)

Soient les vecteurs

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- a) Ces vecteurs sont-ils orthogonaux ?
- b) Forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
- c) Forment-ils une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 6.13 (★)

1. Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Vérifier que $\text{Im}(\mathbf{A})$ et $\text{Ker}(\mathbf{A}^\top)$ sont orthogonaux en explicitant une base de chaque sous-espace.

Exercice 6.14 (★)

1. Avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

montrer que $\text{Im}(\mathbf{A}) \perp \text{Ker}(\mathbf{A}^\top)$ et donner une base de chaque sous-espace.

Exercice 6.15 (★★)

Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- a) Vérifier que $\text{Im}(\mathbf{A}^\top)$ et $\text{Ker}(\mathbf{A})$ sont orthogonaux en explicitant une base de chacun de ses sous-espaces.
- b) Donner la projection de $\mathbf{x} = (4, 0, 2)$ sur $\text{Ker}(\mathbf{A})$, et vérifier qu'elle appartient bien à $\text{Ker}(\mathbf{A})$.
- c) Donner la projection de $\mathbf{x} = (4, 0, 2)$ sur $\text{Im}(\mathbf{A}^\top)$, et vérifier qu'elle appartient bien à $\text{Im}(\mathbf{A}^\top)$.

d) Vérifier que la somme de ces deux projections donne $\mathbf{x}$.

Exercice 6.25 image et noyau d'une matrice symétrique ()**

Soit $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique, c'est-à-dire $\mathbf{M}^\top = \mathbf{M}$. On souhaite établir pas à pas la propriété fondamentale :

$$\text{Im}(\mathbf{M}) = \text{Ker}(\mathbf{M})^\perp.$$

sans utiliser le théorème « Orthogonalité des sous-espaces fondamentaux ».

1. Montrer que $\text{Im}(\mathbf{M}) \subseteq \text{Ker}(\mathbf{M})^\perp$.
2. Comparer les dimensions de $\text{Im}(\mathbf{M})$ et de $\text{Ker}(\mathbf{M})^\perp$.
3. Conclure que $\text{Im}(\mathbf{M}) = \text{Ker}(\mathbf{M})^\perp$.

Exercice 11.13 théorème spectral avec une matrice 2x2 (*)

Donner une diagonalisation dans une base orthonormale de la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.