8. Orthogonalité des quatre sous-espaces

Section 4.1

MTH1007

J. Guérin, N. Lahrichi, S. Le Digabel
Polytechnique Montréal

H2023

(v1)

Plan

1. Rappels

2. Définitions

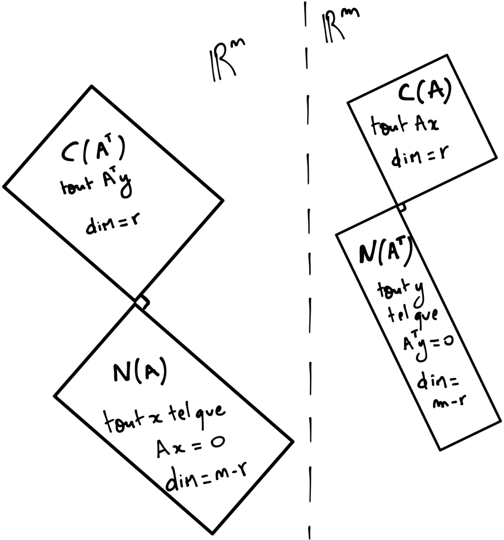
3. Propriétés

Rappels

Si A est une matrice de taille $m \times n$ et de rang r alors

- $C(A^\top)$ est l'espace des lignes, engendré par les lignes de A, et $\dim C(A^\top) = r$. C'est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$
- $N(A)$ est le noyau de A, engendré par les solutions spéciales, et $\dim N(A) = n - r$. C'est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$
- $C(A)$ est l'espace des colonnes, engendré par les colonnes, de A et $\dim C(A) = r$. C'est un sous-espace de $\mathbb{R}^m$
- $N(A^\top)$ est le noyau à gauche de A et $\dim N(A^\top) = m - r$. C'est un sous-espace de $\mathbb{R}^m$

Portrait global (livre p. 187)



1. Rappels

2. Définitions

3. Propriétés

Vecteurs orthogonaux

- Deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{w}$ sont *orthogonaux* si leur produit scalaire est nul
- Dans ce cas, on note $\mathbf{u} \perp \mathbf{w}$, et on a :
  - $\mathbf{u}^\top \mathbf{w} = 0$
  - $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{w}\|^2$

Sous-espaces orthogonaux

- Deux sous-espaces U et W (d'un même espace vectoriel) sont *orthogonaux* si $\mathbf{u}^\top \mathbf{w} = 0$ pour chaque vecteur $\mathbf{u} \in U$ et chaque vecteur $\mathbf{w} \in W$
- Autrement dit, tous les vecteurs de U sont orthogonaux à tous les vecteurs de W (et vice versa)
- On note $U \perp W$

Remarques

- Si U et W sont des sous-espaces orthogonaux alors leur seul vecteur commun est le vecteur nul $\mathbf{0}$
- Si U et W sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ tels que $\dim U + \dim W > n$, alors il ne peuvent pas être orthogonaux
- Ainsi, par exemple, deux plans de $\mathbb{R}^3$ ne peuvent pas être des sous-espaces orthogonaux

Théorèmes

- Si A est une matrice de taille $m \times n$ alors le noyau $N(A)$ et l'espace des lignes $C(A^\top)$ sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux de $\mathbb{R}^n$:

$$N(A) \perp C(A^\top)$$

- Si A est une matrice de taille $m \times n$ alors le noyau à gauche $N(A^\top)$ et l'espace des colonnes $C(A)$ sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux de $\mathbb{R}^m$:

$$N(A^\top) \perp C(A)$$

Preuves que $N(A) \perp C(A^\top)$

- Chaque équation du SÉL $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ signifie que la ligne correspondante de A est orthogonale à $\mathbf{x}$
- Donc chaque ligne de A est perpendiculaire à chaque solution de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- Ceci est vrai aussi pour toutes les combinaisons de lignes

On peut aussi le montrer en considérant $\mathbf{x} \in N(A)$ et $\mathbf{v} \in C(A^\top)$:

- $\mathbf{v}$ peut s'écrire comme combinaison des lignes de A
- Donc on peut trouver un $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ tel que $\mathbf{v} = A^\top \mathbf{y}$
- Ainsi $\mathbf{v}^\top \mathbf{x} = (A^\top \mathbf{y})^\top \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top A\mathbf{x} = \mathbf{0}$: $\mathbf{x} \perp \mathbf{v}$

Preuves que $N(A^\top) \perp C(A)$

On applique les preuves de $N(A) \perp C(A^\top)$ à $A^\top$

Ou bien :

- Chaque équation du SÉL $A^\top \mathbf{y} = \mathbf{0}$ signifie que la colonne correspondante de A est orthogonale à $\mathbf{y}$
- Donc chaque colonne de A est perpendiculaire à chaque solution de $A^\top \mathbf{y} = \mathbf{0}$
- Ceci est vrai aussi pour toutes les combinaisons de colonnes

Complément orthogonal

Définition

Le *complément orthogonal* d'un sous-espace vectoriel W est le sous-espace $W^\perp$ contenant **tous** les vecteurs orthogonaux à W

Théorème

Si W est un sous-espace vectoriel de V alors

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim V$$

Théorèmes

- Si A est une matrice de taille $m \times n$ alors le noyau $N(A)$ est le complément orthogonal de l'espace des lignes $C(A^\top)$, dans $\mathbb{R}^n$:

$$C(A^\top) = N(A)^\perp \text{ et } N(A) = C(A^\top)^\perp$$

- Si A est une matrice de taille $m \times n$ alors le noyau à gauche $N(A^\top)$ est le complément orthogonal de l'espace des colonnes $C(A)$, dans $\mathbb{R}^m$:

$$C(A) = N(A^\top)^\perp \text{ et } N(A^\top) = C(A)^\perp$$

Raison d'être des compléments

Avec une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

- Tout vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ peut se décomposer comme

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_r + \mathbf{x}_n$$

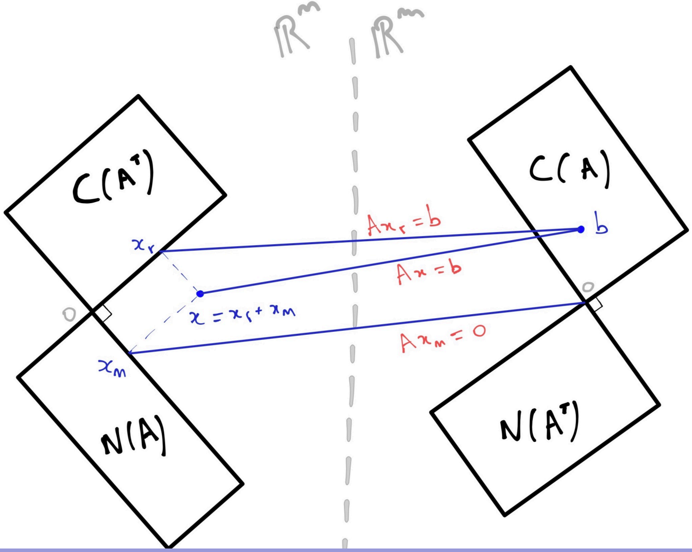
avec $\mathbf{x}_r \in C(A^\top)$ et $\mathbf{x}_n \in N(A)$

- Tout vecteur $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ peut se décomposer comme

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_r + \mathbf{y}_n$$

avec $\mathbf{y}_r \in C(A)$ et $\mathbf{y}_n \in N(A^\top)$

Action de A sur $\mathbf{x}$



Exemple

Avec

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

on a

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_r + \mathbf{x}_n$$

avec $\mathbf{x} = (4, 3)$, $\mathbf{x}_r = (2, 4) \in C(A^\top)$, et $\mathbf{x}_n = (2, -1) \in N(A)$

(on calcule $\mathbf{x}_r$ et $\mathbf{x}_n$ par des *projections* de $\mathbf{x}$ sur $C(A^\top)$ et $N(A)$)