

MTH1007 — Algèbre linéaire pour ingénieurs

Série 8 : Diagonalisation

Exercices (énoncés)

Les numéros renvoient au manuel [alfa](#) (série d'exercices.numéro).

Exercice 11.1 vrai ou faux (★)

Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

1. Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$, alors $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ l'est.
2. Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont diagonalisables dans la même base alors $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.
3. Si $\mathbf{A}$ est diagonalisable et inversible, alors $\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}$ est diagonalisable.
4. Toute matrice triangulaire est diagonalisable.
5. $\mathbf{0}_n$ appartient toujours au sous-espace propre associée à une valeur propre λ .
6. Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ et la forme quadratique q définie par $q(\mathbf{x}) = 2x_1x_2$. La matrice $\mathbf{A}$ telle que $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$ possède 0 comme valeur propre.

Exercice 11.2 vrai ou faux (★★)

Répondre par Vrai ou Faux aux affirmations suivantes, en justifiant à chaque fois.

1. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique ayant n valeurs propres distinctes. Il est possible de trouver une base non orthogonale de vecteurs propres de $\mathbf{A}$.
2. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique ayant n valeurs propres (possiblement égales). Il est possible de trouver une base non orthogonale de vecteurs propres de $\mathbf{A}$.
3. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symétrique, et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ses valeurs propres (possiblement avec une multiplicité algébrique différente de 1). Alors

$$\dim(\text{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})) + \dim(\text{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})) + \dim(\text{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{I})) = n .$$

4. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ et $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ tels que $\mathbf{A} = \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^\top + \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^\top$. Alors $\mathbf{A}$ n'est pas inversible.
5. Une matrice inversible est forcément symétrique.
6. Une matrice symétrique n'a que des valeurs propres réelles.
7. Soit $\mathbf{A}$ une matrice symétrique et orthogonale. Alors $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$.

Exercice 11.3 (★★)

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables dans $\mathbb{R}$?

$$1. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & 5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2. \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3. \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 11.4 (★★)

Soit V un espace vectoriel de dimension 3. On note $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ une base de V . On considère l'endomorphisme $T_1 : V \rightarrow V$ défini par :

$$\begin{aligned} T_1(\mathbf{b}_1) &= 6\mathbf{b}_1 + 4\mathbf{b}_2 \\ T_1(\mathbf{b}_2) &= \mathbf{b}_1 + 6\mathbf{b}_2 \\ T_1(\mathbf{b}_3) &= \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + 4\mathbf{b}_3 \end{aligned}$$

- À quels espaces vectoriels connus V pourrait-il correspondre ? En citer deux, et fournir une base pour chacun d'entre eux.
- Donner la matrice $\mathbf{M}$ de T_1 dans la base $\mathcal{B}$.
- Montrer que $\mathbf{c}_1 = (1, 2, 0)$ est un vecteur propre de $\mathbf{M}$, donner sa valeur propre associée.
- Montrer qu'il existe $\mathbf{c}_2$ et $\mathbf{c}_3$, deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\text{Ker}(\mathbf{M} - 4\mathbf{I})$.
- La famille $\mathcal{C} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
- Quel est le lien entre $\mathbf{M}$ et $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$?

$$7. \text{ Que dire de l'application } T_2 : V \rightarrow V \text{ définie par : } \begin{aligned} T_2(\mathbf{c}_1) &= 16\mathbf{c}_1 \\ T_2(\mathbf{c}_2) &= 8\mathbf{c}_2 \\ T_2(\mathbf{c}_3) &= 8\mathbf{c}_3 \end{aligned} \quad ?$$

Exercice 11.5 (★)

Considérons la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

- $\mathbf{A}$ est-elle inversible ?
- Vérifier que $(4, -2, 1)$ est un vecteur propre de $\mathbf{A}$.

- (c) Déterminer toutes les valeurs propres de $\mathbf{A}$ ainsi que leur multiplicité algébrique et leur multiplicité géométrique.

Exercice 11.6 (★)

Montrer que si $\mathbf{A}$ est semblable à $\mathbf{B}$ et $\mathbf{A}$ est semblable à $\mathbf{C}$, alors $\mathbf{B}$ est semblable à $\mathbf{C}$.

Exercice 11.7 (★)

Montrer que les matrices suivantes sont toutes semblables entre elles : $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,
 $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, et $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Exercice 11.8 diagonaliser avec subtilité (★★)

Si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, laquelle des propositions suivantes est équivalente à l'énoncé « $\mathbf{A}$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ » ?

1. Les sous-espaces propres associés à chacune des valeurs propres de $\mathbf{A}$ ont tous la même dimension.
2. $\mathbf{A}$ admet n valeurs propres distinctes.
3. On peut construire une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de n vecteurs propres de $\mathbf{A}$.
4. Les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont toutes strictement positives.

Exercice 11.9 valeurs propres d'une matrice de rotation (★★)

Soit la matrice de rotation $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de R_θ en fonction de $\theta \in \mathbb{R}$.
2. Pour quelles valeurs de θ les valeurs propres de R_θ sont-elles réelles ?
3. On choisit $\theta = \pi$. La matrice R_θ est-elle diagonalisable ?

Exercice 11.10 (★)

Notons $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}$.
2. Déterminer les vecteurs propres associés aux valeurs propres de $\mathbf{A}$.

Exercice 11.11 (★)

Soit la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Montrer que si $\mathbf{v}_1 \in \text{Ker}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})$ et $\mathbf{v}_2 \in \text{Ker}(\mathbf{A} - 8\mathbf{I})$, alors $\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2$.

Exercice 11.15 (★★)

Soit $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$Q(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 - 2x_1x_3.$$

1. Déterminer la matrice symétrique $\mathbf{A}$ telle que $Q(x) = x^\top \mathbf{A}x$.
2. Effectuer un changement de variable $y = \mathbf{P}x$ tel que $Q(y)$ ne contienne pas de termes non diagonaux.
3. Déterminer si la matrice $\mathbf{A}$ est définie positive, définie négative, semi-définie positive, semi-définie négative ou indéfinie.

Exercice 11.16 (★)

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de $\mathbf{A}$, leur multiplicité algébrique et leur multiplicité géométrique.
2. La matrice $\mathbf{A}$ est-elle diagonalisable ?
3. Si oui, exhiber $\mathbf{P}$ et $\mathbf{D}$ telles que $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$.

Exercice 11.17 (★)

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de $\mathbf{A}$, leur multiplicité algébrique et leur multiplicité géométrique.
2. $\mathbf{A}$ est-elle diagonalisable ?
3. Si oui, fournir $\mathbf{P}$ et $\mathbf{D}$ réalisant $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$.

Exercice 11.18 (★)

Étudier la diagonalisation de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ en répondant aux questions suivantes :

1. Donnez les valeurs propres et leurs multiplicités.
2. La matrice est-elle diagonalisable ? Justifiez.

Exercice 11.19 (★)

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

1. Déterminer le spectre de $\mathbf{A}$ et les dimensions des sous-espaces propres.
2. Conclure sur la diagonalisabilité de $\mathbf{A}$.
3. Si possible, expliciter $\mathbf{P}$ et $\mathbf{D}$ telles que $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$.

Exercice 11.20 (★)

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

1. Déterminer ses valeurs propres (dans $\mathbb{C}$) et les sous-espaces propres associés.
2. $\mathbf{A}$ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?
3. Donner, dans le corps approprié, une factorisation $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$.

Exercice 11.21 (★)

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de $\mathbf{A}$, et pour chacun, donner un vecteur propre associé.
2. La matrice $\mathbf{A}$ est-elle diagonalisable ?
3. Si oui, exhiber $\mathbf{P}$ et $\mathbf{D}$ telles que $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$.

Exercice 11.22 (★)

Pour chacun des cas suivants, donner une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ qui satisfait les contraintes données.

1. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ et toute valeur propre de $\mathbf{A}$ est un réel.
2. Au moins un élément de $\mathbf{A}$ est un imaginaire pur, et toute valeur propre de $\mathbf{A}$ est un imaginaire pur.
3. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ et toute valeur propre de $\mathbf{A}$ est un imaginaire pur.
4. Au moins un élément de $\mathbf{A}$ est un imaginaire pur, et toute valeur propre de $\mathbf{A}$ est un réel.

Exercice 11.23 (★)

Soit $\mathbf{A}$ carrée qui ne possède qu'une seule valeur propre distincte, soit $|\text{Sp}(\mathbf{A})| = 1$. Montrer que $\mathbf{A}$ est diagonalisable si et seulement si $\mathbf{A}$ est diagonale.

Exercice 11.24 hyperplan et noyau (★★)

Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Donner le polynôme caractéristique ainsi que les valeurs propres de $\mathbf{A}$.
2. Donner la multiplicité géométrique de chaque valeur propre de $\mathbf{A}$.
3. Est-ce que $\mathbf{A}$ est diagonalisable ?
4. Soit T l'application linéaire telle que $[T]_{\mathcal{E}} = \mathbf{A}$, $\mathcal{E}$ étant la base canonique.
 - (a) Donner le noyau $\text{Ker}(T)$ de l'application T .
 - (b) L'application T est-elle singulière ?
 - (c) Existe-t-il une base $\mathcal{B}$ telle que $[T]_{\mathcal{B}}$ est la matrice $\mathbf{M}$ ci-dessous ?

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$