

8. Diagonalisation

MTH1007

Sébastien Le Digabel
Polytechnique Montréal

A26

2026-07-16

v0

Plan

1. Introduction

$$\mathbf{A}\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}\mathbf{\Lambda}$$

Matrices semblables

2. Diagonalisation d'une matrice

Définition

Propriétés

Exercices

Liens avec le manuel *alfa*

- ▶ Chapitre 11 : Diagonalisation

1. Introduction

$$A\Sigma = \Sigma\Lambda$$

Matrices semblables

2. Diagonalisation d'une matrice

Définition

Propriétés

Exercices

Relation matricielle entre val. et vect. propres

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ munie des n valeurs et vecteurs propres λ_i et $\mathbf{x}_i$ pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. On a

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i$$

Si on pose $\Sigma = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_n] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \mathbf{O} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

on aura

$$\mathbf{A}\Sigma = \Sigma\Lambda$$

Matrices semblables

Deux matrices carrées **A** et **B** sont dites **semblables** s'il existe **P** inversible telle qu'on a les **relations de similitude**

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}$$

et

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$$

A et **B** ont le même polynôme caractéristique¹, donc les mêmes valeurs propres :

$$\text{Sp}(\mathbf{A}) = \text{Sp}(\mathbf{B})$$

1. $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = |\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1} - \lambda\mathbf{P}\mathbf{I}\mathbf{P}^{-1}| = |\mathbf{P}(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{P}^{-1}| = |\mathbf{P}| |\mathbf{P}^{-1}| |\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}| = |\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}| = p_{\mathbf{B}}(\lambda)$

1. Introduction

$$A\Sigma = \Sigma\Lambda$$

Matrices semblables

2. Diagonalisation d'une matrice

Définition

Propriétés

Exercices

Définition

A est **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale

On a alors

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$$

et

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$$

avec **D** diagonale et **P** inversible

Théorème

Supposons que $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ possède n vecteurs propres **linéairement indépendants** $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ et soit $\Sigma = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \cdots \ \mathbf{x}_n] \in \mathbb{C}^{n \times n}$. On a alors

$$\Sigma^{-1} \mathbf{A} \Sigma = \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

et

$$\mathbf{A} = \Sigma \mathbf{\Lambda} \Sigma^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de $\mathbf{A}$

Ce théorème affirme que $\mathbf{A}$ et $\mathbf{\Lambda}$ sont semblables et que $\mathbf{A}$ peut être **diagonalisée** si ses vecteurs propres sont linéairement indépendants

Remarques

- ▶ La diagonalisation est possible seulement si les vecteurs propres sont linéairement indépendants
- ▶ Les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{\Lambda}$ ont les mêmes valeurs propres (matrices semblables) mais pas les mêmes vecteurs propres
- ▶ Les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^k$ ont les mêmes vecteurs propres mais pas les mêmes valeurs propres
- ▶ $\mathbf{A}$ est une matrice réelle, mais les matrices $\mathbf{\Lambda}$ et $\mathbf{\Sigma}$ sont complexes

Théorème

Des vecteurs propres $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ d'une matrice qui correspondent à des valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sont linéairement indépendants

Si de plus la matrice est symétrique, alors les vecteurs propres sont orthogonaux

Théorème

S'il existe $\lambda \in \text{Sp}(\mathbf{A})$ tel que $\mu_{\mathbf{A}}^g(\lambda) < \mu_{\mathbf{A}}^a(\lambda)$, alors $\mathbf{A}$ n'est *pas* diagonalisable

Si, pour **toutes** les valeurs propres $\lambda \in \text{Sp}(\mathbf{A})$, on a $\mu_{\mathbf{A}}^g(\lambda) = \mu_{\mathbf{A}}^a(\lambda)$, alors la matrice est diagonalisable

Rappel : Pour chaque $\lambda \in \text{Sp}(\mathbf{A})$ on a $1 \leq \mu_{\mathbf{A}}^g(\lambda) \leq \mu_{\mathbf{A}}^a(\lambda)$

Puissances

Si $\mathbf{A}$ est diagonalisable alors $\mathbf{A} = \mathbf{\Sigma}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Sigma}^{-1}$ et $\mathbf{A}^k = \mathbf{\Sigma}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{\Sigma}^{-1}$, où

$$\mathbf{\Lambda}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & \mathbf{O} \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

Application :

Résolution d'équations de récurrence de la forme $\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{u}_k$, avec $\mathbf{u}_0$ fixé. Si $\mathbf{A}$ est diagonalisable alors la solution est

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{A}^k \mathbf{u}_0 = \mathbf{\Sigma}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{u}_0$$

Exercice 1

Diagonaliser les matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Exercice 2

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ qui possède les mêmes n valeurs propres

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$$

c'est-à-dire

$$\text{Sp}(\mathbf{A}) = \{\lambda\}$$

Montrer que $\mathbf{A}$ est diagonalisable si et seulement si $\mathbf{A}$ est diagonale