7. Base et dimension

Sections 3.5 et 3.6

MTH1007

J. Guérin, N. Lahrichi, S. Le Digabel
Polytechnique Montréal

H2023

(v2)

Plan

Indépendance linéaire

Définition

Les vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ sont *linéairement indépendants* si $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ implique que $x_i = 0$ pour chaque i.

S'il existe une combinaison linéaire des $\mathbf{v}_i$ avec des coefficients non nuls qui donne $\mathbf{0}$ alors ces vecteurs sont *linéairement dépendants*

Définition

Les colonnes d'une matrice A sont *linéairement indépendantes* si la seule solution de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Autrement dit, $N(A) = \{\mathbf{0}\}$

Lien avec le rang

Théorème

Les colonnes de la matrice $A^{m\times n}$ sont linéairement indépendantes si et seulement si $r(A) = n$

Conséquence de ce théorème :

Théorème

Si $n > m$ alors n vecteurs de $\mathbb{R}^m$ sont nécessairement dépendants

Exemple

Exercice de TD 3.5.9 page 179

Ensemble générateur et base

Définition

Un ensemble de vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *engendre* (ou *génère*) un espace vectoriel V si tout vecteur de V est combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{v}_i$ avec $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

Définition

Un ensemble de vecteurs $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ est une *base* d'un espace vectoriel V si

1. les vecteurs $\mathbf{v}_i$ sont linéairement indépendants

   et

2. les vecteurs $\mathbf{v}_i$ engendrent V

Bases et colonnes de A

- Les colonnes d'une matrice génèrent son espace des colonnes
- Pour une matrice A de taille $n \times n$ qui est inversible :
  - Les colonnes sont linéairement indépendantes
  - $C(A) = \mathbb{R}^n$

  Autrement dit, les colonnes de A forment une base de $\mathbb{R}^n$
- Pour une matrice A de taille $m \times n$:
  - Les colonnes ne sont pas nécessairement linéairement indépendantes
  - Les colonnes pivots forment une base de $C(A)$

Lien avec un SÉL

Théorème

- n vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^n$ engendrent $\mathbb{R}^n$
- n vecteurs qui engendrent $\mathbb{R}^n$ sont nécessairement linéairement indépendants

Ce théorème peut être reformulé comme suit en termes de SÉL :

- Si les colonnes d'une matrice A de taille $n \times n$ sont linéairement indépendantes, alors :
  - elles engendrent $\mathbb{R}^n$
  - elles forment une base de $\mathbb{R}^n$
  - $C(A) = \mathbb{R}^n$
  - $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possède une solution unique

Dimension

Théorème

Si les vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ forment une base de l'espace vectoriel V, alors tout vecteur de V s'écrit de façon **unique** comme combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{v}_i$ avec $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

Théorème

Si $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ et $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_q\}$ sont deux bases d'un espace vectoriel donné alors $p = q$

Autrement dit, toute base d'un espace vectoriel contient le même nombre de vecteurs

Définition

La *dimension* d'un espace vectoriel V est le nombre de vecteurs dans une base de V. On la note $\dim V$

Espace $\mathbb{Z}$

- L'espace $\mathbb{Z} = \{\mathbf{0}\}$ est de dimension 0
- La seule base de $\mathbb{Z}$ est l'ensemble vide $\emptyset$
- Le vecteur nul $\mathbf{0}$ ne peut pas faire partie d'une base car l'indépendance linéaire serait alors perdue

Exemples

Exercice 3.5.10 page 179
Exercice 3.5.35 page 182

1. Indépendance, base et dimension

2. La dimension des quatre sous-espaces

Espace des colonnes de A : $C(A)$

On considère une matrice A de taille $m \times n$ et R sa forme échelonnée réduite. Soit $r = r(A)$

1. C'est le sous-espace de $\mathbb{R}^m$ engendré par les colonnes de A
2. En général, $C(A) \neq C(R)$
3. Les r colonnes pivots de A forment une base de $C(A)$
4. La dimension de $C(A)$ et de $C(R)$ est égale au rang r de A :

$$\dim C(A) = \dim C(R) = r$$

Espace des lignes de A : $C(A^\top)$

On considère une matrice A de taille $m \times n$ et R sa forme échelonnée réduite. Soit $r = r(A)$

1. L'*espace des lignes de A*, noté $C(A^\top)$, est le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par les lignes de A
2. A et R ont le même espace des lignes : $C(A^\top) = C(R^\top)$
3. Les lignes pivots de R et les lignes pivots de A forment deux bases de $C(A^\top)$
4. La dimension de $C(A^\top)$ et de $C(R^\top)$ est égale au rang r de A :

$$\dim C(A^\top) = \dim C(R^\top) = r$$

Noyau de A : $N(A)$

On considère une matrice A de taille $m \times n$ et R sa forme échelonnée réduite. Soit $r = r(A)$

1. C'est le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ constitué des vecteurs $\mathbf{x}$ tels que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$
2. A et R ont le même noyau : $N(A) = N(R)$
3. Les solutions spéciales forment une base de $N(A)$ et de $N(R)$
4. On a

$$\dim N(A) = \dim N(R) = n - r$$

Noyau à gauche de A : $N(A^\top)$

On considère une matrice A de taille $m \times n$ et R sa forme échelonnée réduite. Soit $r = r(A)$

1. Le *noyau à gauche de A*, noté $N(A^\top)$, est le sous-espace de $\mathbb{R}^m$ constitué des vecteurs $\mathbf{y}$ tels que $A^\top \mathbf{y} = \mathbf{0}$
2. On a
$$\dim N(A^\top) = m - r$$

Dimensions des quatre sous-espaces

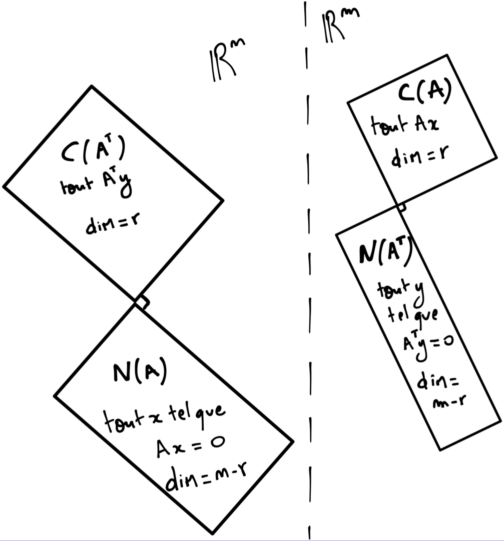
$$\begin{array}{llll} C(A) & \text{sous-espace de } \mathbb{R}^m & \text{et } \dim C(A) & = r \\ C(A^\top) & \text{sous-espace de } \mathbb{R}^n & \text{et } \dim C(A^\top) & = r \\ N(A) & \text{sous-espace de } \mathbb{R}^n & \text{et } \dim N(A) & = n - r \\ N(A^\top) & \text{sous-espace de } \mathbb{R}^m & \text{et } \dim N(A^\top) & = m - r \end{array}$$

Théorème

Pour toute matrice A de taille $m \times n$ on a :

1. $\dim C(A^\top) + \dim N(A) = n$
2. $\dim C(A) + \dim N(A^\top) = m$

Portrait global (livre p. 187)



Matrices de rang 1

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ avec $r(A) = 1$. Alors :

- $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^\top$ avec $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ et $\mathbf{v}^\top \in \mathbb{R}^n$
- Les colonnes de A sont des multiples de $\mathbf{u}$
- Les lignes de A sont des multiples de $\mathbf{v}^\top$
- $C(A)$ est la droite de $\mathbb{R}^m$ générée par $\mathbf{u}$
- $C(A^\top)$ est la droite de $\mathbb{R}^n$ générée par $\mathbf{v}$
- $N(A)$ est perpendiculaire à $C(A^\top)$
- $N(A^\top)$ est perpendiculaire à $C(A)$

Exemples

Illustrer les différents concepts sur

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Exemples

Exercice 3.5.23 page 181
Exercice de TD 3.5.24 page 181