

7. Valeurs propres

MTH1007

Sébastien Le Digabel
Polytechnique Montréal

A26

2026-07-16

v0

Plan

1. Valeurs et vecteurs propres

Motivations

Définitions

Remarques

2. Polynôme caractéristique

Définition

Démarche pour calculer les valeurs et vecteurs propres

Remarques

Multiplicités géométrique et algébrique

Exemples

Valeurs propres complexes

Valeurs propres de matrices symétriques

Analyse spectrale des matrices symétriques

Liens avec le manuel *alfa*

- Chapitre 7 : Valeurs propres

1. Valeurs et vecteurs propres

Motivations

Définitions

Remarques

2. Polynôme caractéristique

Définition

Démarche pour calculer les valeurs et vecteurs propres

Remarques

Multiplicités géométrique et algébrique

Exemples

Valeurs propres complexes

Valeurs propres de matrices symétriques

Analyse spectrale des matrices symétriques

Exemples d'applications

Source : [Wikipedia](#).

- ▶ Étude des phénomènes vibratoires (ex. : mouvements d'une corde vibrante)
- ▶ *"Mise au point d'algorithmique rapide de résolution d'équations linéaires"*
- ▶ Cryptologie
- ▶ Chimie : *"les états stables des électrons sont modélisés par des vecteurs propres dont les valeurs propres correspondent à des états d'énergie"*
- ▶ *PageRank* : Basé sur l'approximation d'un vecteur propre de la matrice d'adjacence du graphe du Web. Voir [ce lien](#)

etc.

Définitions

Soient $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ carrée, $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ non nul, et $\lambda \in \mathbb{C}$

Si

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

alors

- ▶ $\mathbf{x}$ est un *vecteur propre* de $\mathbf{A}$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$)
- ▶ λ est une *valeur propre* de $\mathbf{A}$

Remarques (1/2)

- ▶ L'ensemble des valeurs propres de $\mathbf{A}$ est noté $\text{Sp}(\mathbf{A})$ et est appelé le *spectre* de $\mathbf{A}$
- ▶ Si $\mathbf{x}$ est un vecteur propre alors tout multiple $k\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ l'est aussi
- ▶ Les vecteurs propres associés à $\lambda \neq 0$ sont dans $\text{Im}(\mathbf{A})$
- ▶ Les vecteurs propres associés à $\lambda = 0$ sont les vecteurs non-nuls de $\text{Ker}(\mathbf{A})$
- ▶ Si $\lambda = 0$ est une valeur propre alors $\mathbf{A}$ est singulière
- ▶ Les vecteurs propres associés à la valeur propre λ sont les vecteurs non-nuls de $\text{Ker}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$
- ▶ $\text{Ker}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ est le *sous-espace propre de $\mathbf{A}$ associé à λ*
- ▶ Si λ est une valeur propre de $\mathbf{A}$, alors $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ est singulière

Remarques (2/2)

- ▶ Tous les $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ de $\mathbb{R}^n$ sont les vecteurs propres de $\mathbf{I}$ avec la valeur propre associée $\lambda = 1$
- ▶ $\mathbf{A}^k \mathbf{x} = \lambda^k \mathbf{x}$: Les vecteurs propres de $\mathbf{A}^k$ sont les mêmes que $\mathbf{A}$ tandis que les valeurs propres sont élevées à la puissance k (fonctionne aussi avec $k = -1$ si $\mathbf{A}$ est inversible)
- ▶ Commandes MATLAB :
 - ▶ La fonction $[S, L] = \text{eig}(A)$ donne les valeurs propres de A dans la matrice diagonale $\Lambda = L$ et les vecteurs propres comme les colonnes de $\Sigma = S$. On a ainsi $\Sigma \Lambda = A \Sigma$
 - ▶ Le programme eigshow permet d'illustrer le concept des valeurs/vecteurs propres

1. Valeurs et vecteurs propres

Motivations

Définitions

Remarques

2. Polynôme caractéristique

Définition

Démarche pour calculer les valeurs et vecteurs propres

Remarques

Multiplicités géométrique et algébrique

Exemples

Valeurs propres complexes

Valeurs propres de matrices symétriques

Analyse spectrale des matrices symétriques

Polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$

- ▶ λ est une valeur propre de la matrice $\mathbf{A}$ si et seulement si

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

- ▶ Les valeurs propres sont donc les racines du *polynôme caractéristique* $p_{\mathbf{A}}$ de la matrice $\mathbf{A}$
- ▶ Si $\mathbf{A}$ est de taille $n \times n$ alors $p_{\mathbf{A}}$ est un polynôme de degré n
- ▶ On va donc avoir n valeurs propres réelles ou complexes, en considérant les ordres des racines (*multiplicité algébrique*)

Calculer les valeurs et vecteurs propres de A

1. Former la matrice $A - \lambda I$ et calculer $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

Calculer les valeurs et vecteurs propres de $\mathbf{A}$

1. Former la matrice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ et calculer $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$
2. Trouver les racines du polynôme caractéristique $p_{\mathbf{A}}$ pour obtenir les valeurs propres de $\mathbf{A}$

Calculer les valeurs et vecteurs propres de $\mathbf{A}$

1. Former la matrice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ et calculer $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$
2. Trouver les racines du polynôme caractéristique $p_{\mathbf{A}}$ pour obtenir les valeurs propres de $\mathbf{A}$
3. Pour chaque valeur propre λ trouvée à la deuxième étape, résoudre

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad \text{ou} \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

pour trouver les vecteurs propres correspondants

Remarques (1/2)

- ▶ Il est possible que $p_{\mathbf{A}}$ possède une racine λ de **multiplicité algébrique** supérieure à 1 : $\mu_{\mathbf{A}}^a(\lambda) \geq 1$
- ▶ Il est aussi possible que $p_{\mathbf{A}}$ possède une racine complexe et des vecteurs propres complexes
- ▶ En considérant les valeurs propres complexes et les valeurs propres multiples, on aura toujours n valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$
- ▶ $\text{Sp}(\mathbf{A})$ contient les valeurs propres **distinctes** : $|\text{Sp}(\mathbf{A})| \in \llbracket 1; n \rrbracket$

Remarques (2/2)

- Pour une matrice triangulaire, les valeurs propres sont ses éléments diagonaux
- Si $\mathbf{A}$ est de taille $n \times n$ alors

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \text{tr}(\mathbf{A})$$

- Si $\mathbf{A}$ est de taille $n \times n$ alors

$$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \det(\mathbf{A})$$

Multiplicités géométrique et algébrique

Si λ est une valeur propre de $\mathbf{A}$ alors il y a deux points de vue :

1. Géométrique : il existe des vecteurs $\mathbf{x}$ non nuls tels que
 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$

2. Algébrique : $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$

► Ceci correspond à deux nombres :

1. *Multiplicité géométrique* $\mu_{\mathbf{A}}^g(\lambda)$: le nombre de vecteurs propres linéairement indépendants associés à λ . C'est la dimension du sous-espace propre $\text{Ker}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$
2. *Multiplicité algébrique* $\mu_{\mathbf{A}}^a(\lambda)$: la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique $p_{\mathbf{A}}$

► Pour chaque $\lambda \in \text{Sp}(\mathbf{A})$ on a $\mu_{\mathbf{A}}^g(\lambda) \leq \mu_{\mathbf{A}}^a(\lambda)$

Exemples

Illustrer les différents concepts sur les matrices

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Valeurs et vecteurs propres

Motivations

Définitions

Remarques

2. Polynôme caractéristique

Définition

Démarche pour calculer les valeurs et vecteurs propres

Remarques

Multiplicités géométrique et algébrique

Exemples

Valeurs propres complexes

Valeurs propres de matrices symétriques

Analyse spectrale des matrices symétriques

Val. et vec. propres complexes d'une matrice réelle

- ▶ On s'intéresse ici aux valeurs propres et vecteurs propres complexes d'une matrice réelle :

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{\Sigma} \in \mathbb{C}^{n \times n}, \text{ et } \mathbf{\Lambda} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

- ▶ On a toujours n valeurs propres, mais certaines seront possiblement complexes, et celles-ci sont associées à des vecteurs propres complexes

- ▶ De plus, si $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, alors $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{x}}$

$\implies$ Les valeurs propres complexes (avec une partie imaginaire non nulle) sont deux à deux conjuguées et associées à des vecteurs propres complexes conjugués aussi

Exercice 4

Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{bmatrix}$$

Remarquer que $\overline{\lambda_1} = \lambda_2$ et $\overline{\mathbf{x}_1} = \mathbf{x}_2$

1. Valeurs et vecteurs propres

Motivations

Définitions

Remarques

2. Polynôme caractéristique

Définition

Démarche pour calculer les valeurs et vecteurs propres

Remarques

Multiplicités géométrique et algébrique

Exemples

Valeurs propres complexes

Valeurs propres de matrices symétriques

Analyse spectrale des matrices symétriques

Cas particulier d'une matrice symétrique 2×2

Avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

et $\text{Sp}(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, on a les deux vecteurs propres

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} b \\ \lambda_1 - a \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 - c \\ b \end{bmatrix}$$

Valeurs et vecteurs propres de $\mathbf{A}$ symétrique

- ▶ $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est *symétrique* si $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}$
- ▶ Les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont réelles
- ▶ Si une valeur propre *se répète p fois*, alors il est possible de trouver p vecteurs propres associés qui sont indépendants :

$$\mu_{\mathbf{A}}^{\mathbf{a}}(\lambda) = \mu_{\mathbf{A}}^{\mathbf{g}}(\lambda) \text{ pour tout } \lambda \in \text{Sp}(\mathbf{A})$$

- ▶ Les vecteurs propres qui correspondent à des valeurs propres distinctes *sont orthogonaux*
- ▶ $\mathbf{A}$ est donc *diagonalisable*, et en plus, on peut choisir n vecteurs propres *orthonormaux*