6. Rang et solution complète d'un SÉL

Sections 3.3 et 3.4

MTH1007

J. Guérin, N. Lahrichi, S. Le Digabel
Polytechnique Montréal

H2023

(v2)

Plan

1. Rang et forme réduite d'une matrice

2. La solution complète à $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$

1. Rang et forme réduite d'une matrice

2. La solution complète à $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$

Rang d'une matrice

Idée : une matrice de taille $m \times n$, une fois réduite, peut contenir des lignes nulles qui correspondent à des équations redondantes

La "vraie" taille d'une matrice est son *rang*

Définition

Le *rang* d'une matrice A est le nombre de pivots de la matrice. Il est noté $r(A)$

Remarque :

Si A est de taille $m \times n$ alors :

$$\begin{array}{lcll} r(A) & \leq & \text{nombre de lignes de } A & = m \\ r(A) & \leq & \text{nombre de colonnes de } A & = n \end{array}$$

Remarques

1. Les r colonnes pivots de la matrice échelonnée réduite R, avec les r *lignes pivots* correspondantes, forment la matrice identité $r \times r$

Remarques

1. Les r colonnes pivots de la matrice échelonnée réduite R, avec les r *lignes pivots* correspondantes, forment la matrice identité $r \times r$
2. Les numéros des colonnes pivots de A et R sont les mêmes

Remarques

1. Les r colonnes pivots de la matrice échelonnée réduite R, avec les r *lignes pivots* correspondantes, forment la matrice identité $r \times r$
2. Les numéros des colonnes pivots de A et R sont les mêmes
3. Une colonne pivot de R n'est *pas* combinaison linéaire des colonnes précédentes. Il en est de même pour A

Remarques

1. Les r colonnes pivots de la matrice échelonnée réduite R, avec les r *lignes pivots* correspondantes, forment la matrice identité $r \times r$
2. Les numéros des colonnes pivots de A et R sont les mêmes
3. Une colonne pivot de R n'est *pas* combinaison linéaire des colonnes précédentes. Il en est de même pour A
4. Une autre façon d'énoncer le point précédent : les colonnes pivots sont linéairement indépendantes

Remarques

1. Les r colonnes pivots de la matrice échelonnée réduite R, avec les r *lignes pivots* correspondantes, forment la matrice identité $r \times r$
2. Les numéros des colonnes pivots de A et R sont les mêmes
3. Une colonne pivot de R n'est *pas* combinaison linéaire des colonnes précédentes. Il en est de même pour A
4. Une autre façon d'énoncer le point précédent : les colonnes pivots sont linéairement indépendantes
5. Les espaces des colonnes $C(A)$ et $C(R)$ sont en général *différents*

Remarques

1. Les r colonnes pivots de la matrice échelonnée réduite R, avec les r *lignes pivots* correspondantes, forment la matrice identité $r \times r$
2. Les numéros des colonnes pivots de A et R sont les mêmes
3. Une colonne pivot de R n'est *pas* combinaison linéaire des colonnes précédentes. Il en est de même pour A
4. Une autre façon d'énoncer le point précédent : les colonnes pivots sont linéairement indépendantes
5. Les espaces des colonnes $C(A)$ et $C(R)$ sont en général *différents*
6. Une définition équivalente de $r(A)$ est :

$$\begin{aligned} r(A) &= \text{nombre de colonnes pivots de } A \\ &= \text{nombre max. de colonnes lin. indépendantes de } A \end{aligned}$$

Solutions spéciales (1/4)

1. Si A est de taille $m \times n$ et de rang r alors A possède r variables pivots et $n - r$ variables libres

Solutions spéciales (1/4)

1. Si A est de taille $m \times n$ et de rang r alors A possède r variables pivots et $n - r$ variables libres

2. Les colonnes libres sont combinaisons linéaires des colonnes pivots. Les combinaisons linéaires sont données par les solutions spéciales (du noyau)

Solutions spéciales (1/4)

1. Si A est de taille $m \times n$ et de rang r alors A possède r variables pivots et $n - r$ variables libres

2. Les colonnes libres sont combinaisons linéaires des colonnes pivots. Les combinaisons linéaires sont données par les solutions spéciales (du noyau)

3. Par définition, toute solution spéciale $\mathbf{s}$ appartient au noyau $N(A)$

Solutions spéciales (1/4)

1. Si A est de taille $m \times n$ et de rang r alors A possède r variables pivots et $n-r$ variables libres
2. Les colonnes libres sont combinaisons linéaires des colonnes pivots. Les combinaisons linéaires sont données par les solutions spéciales (du noyau)
3. Par définition, toute solution spéciale $\mathbf{s}$ appartient au noyau $N(A)$
4. Réciproquement, si $\mathbf{x} \in N(A)$, alors $\mathbf{x}$ est combinaison linéaire des solutions spéciales $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \ldots, \mathbf{s}_{n-r}$

Solutions spéciales (2/4)

- Si $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \ldots, \mathbf{s}_{n-r}$ sont les solutions spéciales d'une matrice A alors la *matrice noyau* correspondante est

$$N = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \cdots & \mathbf{s}_{n-r} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times(n-r)}$$

qui satisfait $AN = RN = \mathbf{0}$

- Si les r premières colonnes sont les colonnes pivots, on peut écrire R sous la forme :

$$R = \left[\begin{array}{c|c} I^{r\times r} & F^{r\times(n-r)} \\ \hline \mathbf{0}^{(m-r)\times r} & \mathbf{0}^{(m-r)\times(n-r)} \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

(si des permutations sont en jeu, on aura RP au lieu de R)

Solutions spéciales (3/4)

Avec $R = \left[\begin{array}{c|c} I & F \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{m\times n}$

- $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$ signifie

$$I \begin{bmatrix} \text{variables} \\ \text{pivots} \end{bmatrix} = -F \begin{bmatrix} \text{variables} \\ \text{libres} \end{bmatrix}$$

- Et de $AN = RN = \mathbf{0}$, on a

$$N = \begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times(n-r)}$$

(si des permutations sont en jeu, on aura PN au lieu de N)

Solutions spéciales (4/4)

- **Attention :** Matrice noyau $N \neq$ Noyau $N(A)$
  (matrice $\neq$ s.e.v.)
- Les colonnes de la matrice noyau sont les $n - r$ solutions spéciales qui génèrent le noyau
- Le noyau est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ qui contient $\mathbf{0}$ et possiblement une infinité de vecteurs non nuls
- $N(A) = C(N)$:
  - Si $\mathbf{x} \in N(A) \subseteq \mathbb{R}^n$, alors $\mathbf{x} = N\mathbf{y}$ avec $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-r}$
    $\Rightarrow \mathbf{x} \in C(N)$
  - Si $\mathbf{x} \in C(N)$, alors il existe $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-r}$ tel que $\mathbf{x} = N\mathbf{y}$ et
    $A\mathbf{x} = AN\mathbf{y} = \mathbf{0}\mathbf{y} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} \in N(A)$

Exemple (avec permutation)

Trouver les solutions spéciales de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & 10 \\ 3 & 3 & 10 & 13 \end{bmatrix}$

Exemple (TD)

Exercice de TD 3.3.24 p.155

Matrices de rang 1

Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est une matrice de rang 1 :

- Elle possède une seule ligne pivot $\mathbf{v}^\top$ avec $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$
- Elle peut se factoriser comme $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^\top$ avec $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$
- Chaque vecteur du noyau est perpendiculaire à $\mathbf{v}$ car $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ implique $\mathbf{v}^\top\mathbf{x} = 0$
- Chaque ligne est multiple de la ligne pivot. Chaque colonne est multiple de la colonne pivot

Matrices de rang 1 en dimension 3

Si $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ est une matrice de rang 1 :

- A possède un seul pivot et deux variables libres
- Le noyau de A est engendré par deux solutions spéciales. Géométriquement, il s'agit d'un plan passant par l'origine
- L'*espace des lignes* de A, noté $C(A^\top)$, est le s.e.v. engendré par $\mathbf{v}$, soit une droite passant par l'origine et perpendiculaire au plan correspondant au noyau $N(A)$

Exemples

1. Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ avec $a \neq 0$ et $r(A) = 1$

   Exprimer d en fonction de a, b, c et donner la solution spéciale du noyau

2. Soit $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$

   Donner R et montrer que $r(B) = 1$. Donner les solutions spéciales. Donner la ligne pivot $\mathbf{v}^\top$ et factoriser B sous la forme $\mathbf{u}\mathbf{v}^\top$. Décrire l'espace des lignes engendré par $\mathbf{v}$ et trouver l'équation du plan $N(B)$

1. Rang et forme réduite d'une matrice

2. La solution complète à $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$

Résolution d'un SÉL

Pour résoudre $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

1. Former la matrice augmentée $[A|\mathbf{b}]$
2. Appliquer la procédure d'élimination à la matrice en **1** pour obtenir la forme échelonnée réduite $[R|\mathbf{d}]$
3. Résoudre le système correspondant à la matrice en **2** pour les variables pivots en fonction des variables libres, si possible

Important : Une solution existe si et seulement si chaque ligne nulle dans R est aussi nulle dans $\mathbf{d}$

Solution particulière et solution complète

- Une *solution particulière* $\mathbf{x}_p$ du SÉL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (si elle existe) est obtenue en posant toutes les variables libres égales à zéro. On a alors

$$\mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

- Toute solution au SÉL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ s'écrit

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_n$$

avec $\mathbf{x}_n \in N(A)$

- Si A est inversible, il n'y a pas de variable libre, $N(A) = \{\mathbf{0}\}$, et la solution au système est unique et s'écrit :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_n = \mathbf{d} + \mathbf{0} = A^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{0} = A^{-1}\mathbf{b}$$

Matrice de plein rang ligne : $r = m < n$

On considère une matrice A de taille $m \times n$ avec $r(A) = m$

- $R = \begin{bmatrix} I^{m\times m} & F^{m\times(n-m)} \end{bmatrix}$
- Chaque ligne possède un pivot
- Il y a $n - m > 0$ variables libres et solutions spéciales
- $N(A)$ est engendré par les solutions spéciales
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possède une infinité de solutions

Exemple avec $[A|b] = \left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right]$

Matrice de plein rang colonne : $r = n < m$

On considère une matrice A de taille $m \times n$ avec $r(A) = n$

- $R = \begin{bmatrix} I^{n\times n} \\ \mathbf{0}^{(m-n)\times n} \end{bmatrix}$
- Chaque colonne possède un pivot
- Il n'y a aucune variable libre ou solution spéciale
- $N(A) = \{\mathbf{0}\}$
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possède soit une solution unique, soit aucune solution

Exemple avec $[A|b] = \left[\begin{array}{rr|l} 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 2 & b_2 \\ -2 & -3 & b_3 \end{array}\right]$

Matrice carrée de plein rang : $r = m = n$

On considère une matrice A de taille $n \times n$ avec $r(A) = n$

- $R = I$ (A est inversible)
- Chaque ligne et chaque colonne possèdent un pivot
- Il n'y a aucune variable libre et aucune solution spéciale
- $N(A) = \{\mathbf{0}\}$
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possède une solution unique $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$

Matrice qui n'est pas de plein rang : $r < m$ et $r < n$

On considère une matrice A de taille $m \times n$ avec

$$r(A) = r < \min\{m, n\}$$

- $R = \left[\begin{array}{cc} I^{r\times r} & F^{r\times(n-r)} \\ \mathbf{0}^{(m-r)\times r} & \mathbf{0}^{(m-r)\times(n-r)} \end{array} \right]$
- Certaines lignes et certaines colonnes n'ont pas de pivot
- Il y a $n - r$ variables libres et solutions spéciales
- $N(A)$ est engendré par les solutions spéciales
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possède soit aucune solution, soit une infinité de solutions

Résumé

Les 4 possibilités sont :

$r = m < n$	plein rang ligne	$R = [I F]$	∞ de sol.
$r = n < m$	plein rang colonne	$R = \begin{bmatrix} I \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$	0 ou 1 sol.
$r = m = n$	plein rang	$R = I$	1 solution
$r < m$ et $r < n$	pas de plein rang	$R = \begin{bmatrix} I & F \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	0 ou ∞ de sol.