

MTH1007 — Algèbre linéaire pour ingénieurs

Série 6 : Applications linéaires

Exercices (énoncés)

Les numéros renvoient au manuel [alfa](#) (série d'exercices.numéro).

Exercice 4.1 (★)

Si T est une application telle que $T(\mathbf{0}) \neq 0$, montrer que T n'est pas linéaire.

Exercice 4.2 (★)

Pour chacune des fonctions ci-dessous, indiquer si elle correspond à une application linéaire. Si oui, indiquer

- i) La matrice $\mathbf{A}$ correspondante ;
- ii) Une base de l'image ;
- iii) Une base du noyau ;
- iv) Si la transformation est injective, si elle est surjective et si elle est bijective.

- a) $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
- b) $f(x_1, x_2) = (2x_1 + 3x_2, |x_1|)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
- c) $f(x_1, x_2) = (3, x_1 + x_2)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
- d) $f(x_1, x_2) = (2x_1 + 3x_2, x_1)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
- e) $f(x_1, x_2) = (x_2, x_1 + 1)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
- f) $f(x_1, x_2) = (x_1x_2, 0)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
- g) $f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 0, x_1 + 4x_2)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
- h) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 6x_2 + 3x_3, 2x_1 + 12x_2 + 6x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4.3 (★)

Existe-t-il une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ telle que le noyau est $\{\mathbf{x} | x = y \text{ et } z = 0\}$?

Exercice 4.4 (★)

Montrer que l'application associée à la matrice $\begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$ est une réflexion par rapport à l'origine et une rotation d'angle $\pi/4$. Montrer que c'est aussi une rotation d'angle $5\pi/4$.

Exercice 4.5 dérivation de polynômes (★★)

Soit P_n l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n , c'est-à-dire qui s'écrivent sous la forme $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Soit $D : P_n \rightarrow P_n$ l'application qui à un polynôme p associe sa dérivée : $D(p) = p'$.

1. Justifier rapidement que $\dim(P_n) = n + 1$.
2. Montrer que D est une application linéaire.
3. Déterminer $\text{Ker } D$. En déduire que D n'est pas bijective.
4. Déterminer la matrice $\mathbf{M}$ canoniquement¹ associée à D , et montrer par récurrence que $\mathbf{M}^n = \mathbf{0}$. On dit que cette matrice est **nilpotente**.
5. Déduire de la question précédente que $\det(\mathbf{M}) = 0$, et retrouver que D n'est pas bijective.
6. La matrice $(\mathbf{I} - \mathbf{M})$ est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.

Exercice 4.6 quelques factorisations (★)

Pour chacun des polynômes suivants, donner la forme factorisée sur $\mathbb{R}$, et sur $\mathbb{C}$.

1. $p_1(x) = 2x^4 + x^3 - 11x^2 + 11x - 3$, sachant que 1 est racine double (c'est-à-dire que p_1 est divisible par $(x - 1)^2$)
2. $p_2(x) = x^3 + x$
3. $p_3(x) = x^4 - 1$
4. $p_4(x) = x^4 + 2x^2 + 3$
5. $p_5(x) = 2x^3 - 38x - 60$, sachant que -3 est racine

Exercice 4.7 bijectivité, injectivité, surjectivité (★★)

Les fonctions suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ? Vous pouvez justifier par un tracé de la courbe de la fonction.

1.

$$\begin{aligned} f: [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto f(x) = x^2 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} f: [0, 1] &\longrightarrow [0, 2] \\ x &\longmapsto f(x) = x^2 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} f: [-1, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto f(x) = x^2 \end{aligned}$$

1. la base canonique de P_n est $(1, x, x^2, \dots, x^n)$.

4.

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = e^x \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = e^x \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto f(x) = e^x \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\longmapsto f(x) = e^x \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} f: \{-1; 1\} &\longrightarrow \{-1; 1\} \\ x &\longmapsto f(x) = -x \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} f: [0, \pi[&\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto f(x) = \sin(x) \end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned} f: [0, \pi/2] &\longrightarrow [0, 1[\\ x &\longmapsto f(x) = \sin(x) \end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned} f: [0, \pi/2] &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto f(x) = \sin(x) \end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \sin(x) \end{aligned}$$

Exercice 4.8 (★★)

Soient $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application linéaire définie par $T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Montrer que T est injective si et seulement si $0 \notin \text{Sp}(\mathbf{A})$.

Exercice 4.9 (★★)

Considérer la forme quadratique définie par

$$Q(\mathbf{x}) = \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + 2\gamma x_1 x_2,$$

pour α, β, γ des constantes réelles.

1. Déterminer la matrice $\mathbf{A}$ associée à cette forme quadratique.

2. Sans calcul, justifier que les valeurs propres de $\mathbf{A}$ seront forcément réelles.
3. Montrer que le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\alpha + \beta)\lambda + (\alpha\beta - \gamma^2).$$

4. Donner l'expression des valeurs propres de $\mathbf{A}$ en fonction de α, β et γ .
5. À quelle condition sur α, β et γ la forme quadratique Q est-elle définie positive ?
6. Si $\beta = 0$ et $\gamma \neq 0$, donner un exemple où Q est non définie.