

6. Applications linéaires et formes quadratiques

MTH1007

Sébastien Le Digabel
Polytechnique Montréal

A26

2026-07-16

v0

Plan

Introduction

Application linéaire

Image et noyau

Matrice d'une application linéaire

Injectivité et surjectivité

Application surjective

Application injective

Application bijective

Formes quadratiques

Liens avec le manuel *alfa*

- ▶ 4.4 : Applications linéaires
- ▶ 4.5 : Formes quadratiques

Introduction

Application linéaire

Image et noyau

Matrice d'une application linéaire

Injectivité et surjectivité

Application surjective

Application injective

Application bijective

Formes quadratiques

Introduction

- ▶ Avec $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, l'équation

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

permet de “passer” de $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^m$: $\mathbf{A}$ transforme $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ en $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$

- ▶ C'est l'**application** / la fonction / la transformation

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\mathbf{x} \mapsto T(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$$

- ▶ $T(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$ est appelée **l'image de $\mathbf{x}$ par T** , et l'ensemble de tous les $T(\mathbf{x})$ pour tous les $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, forme **l'image de T** , qui est aussi l'image de $\mathbf{A}$: $\text{Im}(\mathbf{A}) = \{T(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$

Application et application linéaire

L'application $T : U \rightarrow V$, avec U et V deux sev, est un *procédé* qui associe un unique vecteur $T(\mathbf{x}) \in V$ pour tout vecteur $\mathbf{x} \in U$

De plus, T est dite **linéaire** si

1. $T(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = T(\mathbf{a}) + T(\mathbf{b})$ pour tous $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ dans U
2. $T(c\mathbf{a}) = cT(\mathbf{a})$ pour tout $\mathbf{a} \in U$ et tout scalaire c

qui peut aussi se formuler par

$$T(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha T(\mathbf{a}) + \beta T(\mathbf{b})$$

pour tous $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ dans U , et α, β des scalaires

Propriétés

- ▶ Toute **application matricielle** $T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ est linéaire
- ▶ **Toute application linéaire est matricielle**
- ▶ $T(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V$
où $\mathbf{0}_U$ est le vecteur nul de U , et $\mathbf{0}_V$ est le vecteur nul de V
- ▶ $T(a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \dots + a_p\mathbf{x}_p) =$
 $a_1T(\mathbf{x}_1) + a_2T(\mathbf{x}_2) + \dots + a_pT(\mathbf{x}_p)$ avec a_i un scalaire et
 $\mathbf{x}_i \in U$ pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$

Image et noyau

Soit T une application de U dans V

- L'image de T est le sev de V

$$\text{Im}(T) = \{T(\mathbf{x}) \text{ pour tout } \mathbf{x} \in U\} \subseteq V$$

- Le noyau de T est le sev de U

$$\text{Ker}(T) = \{\mathbf{x} \in U : T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} \subseteq U$$

Si T est linéaire et $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est la matrice associée, alors

$$\text{Im}(T) = \text{Im}(\mathbf{A}) \subseteq \mathbb{R}^m \text{ et } \text{Ker}(T) = \text{Ker}(\mathbf{A}) \subseteq \mathbb{R}^n$$

Cas particulier : Homothétie

Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ avec $T(\mathbf{x}) = r\mathbf{x}$ pour r un scalaire fixé

- ▶ T est une **homothétie** qui peut être qualifiée de **contraction** si $0 \leq r \leq 1$ ou de **dilatation** si $r > 1$
- ▶ T est une application linéaire car c'est une transformation matricielle particulière : $T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ avec $\mathbf{A} = r\mathbf{I}$

Introduction

Application linéaire

Image et noyau

Matrice d'une application linéaire

Injectivité et surjectivité

Application surjective

Application injective

Application bijective

Formes quadratiques

Matrice d'une application linéaire

Pour toute application linéaire $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, il existe une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ unique telle que pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

et $\mathbf{A}$ se trouve par la formule

$$\mathbf{A} = [T(\mathbf{e}_1) \ T(\mathbf{e}_2) \ \dots \ T(\mathbf{e}_n)]$$

$\mathbf{A}$ est appelée la **matrice canoniquement associée à T**

Exercice 1

Déterminer $\mathbf{A}$ pour $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lorsque

- ▶ T est l'homothétie $T(\mathbf{x}) = 3\mathbf{x}$
- ▶ T est la rotation centrée à l'origine d'angle φ

Exercice 1

Déterminer $\mathbf{A}$ pour $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lorsque

- ▶ T est l'homothétie $T(\mathbf{x}) = 3\mathbf{x}$
- ▶ T est la rotation centrée à l'origine d'angle φ

Réponse :

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Produit matriciel = composition d'applications

Soient les applications linéaires T_1 et T_2 associées aux matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$. Le produit $\mathbf{AB}$ correspond à la **composition** $T_1 \circ T_2$:

$$\mathbf{ABx} = \mathbf{A}(T_2(\mathbf{x})) = T_1(T_2(\mathbf{x})) = T_1 \circ T_2(\mathbf{x})$$

Introduction

Application linéaire

Image et noyau

Matrice d'une application linéaire

Injectivité et surjectivité

Application surjective

Application injective

Application bijective

Formes quadratiques

Existence : Application surjective

$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est dite **surjective** si tout vecteur de $\mathbb{R}^m$ est l'image d'**au moins** un vecteur de $\mathbb{R}^n$ (par T)

- ▶ T surjective $\iff$ le système $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ possède au moins une solution pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
- ▶ T non surjective $\iff$ il existe $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ tel que le système $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ ne possède pas de solution
- ▶ T surjective $\iff \text{Im}(T) = \mathbb{R}^m$

Unicité : Application injective

$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est dite **injective** si tout vecteur de $\mathbb{R}^m$ est l'image d'**au plus** un vecteur de $\mathbb{R}^n$ (par T)

- ▶ T injective $\iff$ le système $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ possède soit une solution unique, soit aucune, pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
- ▶ T non injective $\iff$ il existe $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ tel que le système $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ possède plus d'une solution
- ▶ Si T est linéaire :
 T injective $\iff T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ne possède que la solution triviale $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, c'est-à-dire $\text{Ker}(T) = \{\mathbf{0}\}$

Injection et surjection avec $\mathbf{A}$ telle que $T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$

T surjective si et seulement si

- ▶ $\text{Im}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^m$
- ▶ $\text{rg}(\mathbf{A}) = m$: $\mathbf{A}$ est de plein rang ligne
- ▶ Les lignes de $\mathbf{A}$ sont indépendantes

T injective si et seulement si

- ▶ $\text{Ker}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$
- ▶ $\text{rg}(\mathbf{A}) = n$: $\mathbf{A}$ est de plein rang colonne
- ▶ Les colonnes de $\mathbf{A}$ sont indépendantes

Exercice 3

Montrer que l'application associée à

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

est surjective et non injective

Matrices et applications inversibles

- ▶ Une application T à la fois injective et surjective est dite **bijective**. La matrice associée $\mathbf{A}$ est alors une matrice carrée de plein rang (inversible)
- ▶ Pour $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, les énoncés suivants sont équivalents :
 - ▶ $\mathbf{A}$ inversible
 - ▶ T injective
 - ▶ T surjective
- ▶ Si $\mathbf{A}$ est inversible, alors T est dite **inversible** aussi, et son inverse est T^{-1} l'application linéaire associée à $\mathbf{A}^{-1}$
- ▶ Si T est inversible, on aura
 - ▶ $T(T^{-1}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
 - ▶ $T^{-1}(T(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

Introduction

Application linéaire

Image et noyau

Matrice d'une application linéaire

Injectivité et surjectivité

Application surjective

Application injective

Application bijective

Formes quadratiques

Définition

Une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ est une application de la forme

$$\begin{aligned} Q : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\mapsto Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} \end{aligned}$$

avec $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symétrique. $Q(\mathbf{x})$ est donc l'application qui donne l'énergie de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{x}$

Exercice 4 : Trouver la matrice associée à

$$Q(\mathbf{x}) = 5x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 + 8x_2x_3$$

Remarques

- ▶ Le **signe de la forme quadratique Q** est le même que le **signe de la matrice A**
- ▶ Les colonnes de Q sont appelées les **axes principaux** de la forme quadratique Q