5. Noyau d'une matrice

Section 3.2

MTH1007

J. Guérin, N. Lahrichi, S. Le Digabel
Polytechnique Montréal

H2023

(v2)

Plan

Le noyau de A

Définition

Le *noyau* d'une matrice A est l'ensemble des vecteurs qui sont solutions au SÉL $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. On le note $N(A)$

Théorème

Si A est une matrice de taille $m \times n$ alors $N(A)$ **est un sous-espace de** $\mathbb{R}^n$:

$$N(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Solutions triviale et spéciales

- Si A est inversible, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est la seule solution de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$: c'est la *solution triviale*
- Le noyau est constitué de la solution triviale $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ et de toutes les combinaisons de *solutions spéciales*
- Les solutions spéciales sont construites à partir des *composantes libres* et des *pivots*
- Les composantes libres correspondent aux colonnes sans pivot

Motivation

- Soit $\mathbf{x}$ une solution au SÉL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Si $\mathbf{y}$ est dans le noyau de A, alors $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ est une autre solution au SÉL :

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$$

- Trouver le noyau de A permet donc d'exprimer toutes les solutions au SÉL, à partir d'une *solution particulière* (ceci sera expliqué à la leçon #6)

1. Définition du noyau

2. Matrice échelonnée

3. Matrice échelonnée réduite

Matrice échelonnée

- Une matrice est *échelonnée* si le premier élément non nul d'une ligne est toujours situé dans une colonne à droite du premier élément non nul de la ligne précédente

- **Exemple :** x_1, x_4, x_5 sont les *variables pivots* et x_2, x_3, x_6 sont les *variables libres* :

$$U = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & & & x_4 & x_5 & \\ \downarrow & & & \downarrow & \downarrow & \end{array} \\ \begin{bmatrix} \mathsf{p} & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \mathsf{p} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{p} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 6} \\ \begin{array}{cccccc} & \uparrow & \uparrow & & & \uparrow \\ & x_2 & x_3 & & & x_6 \end{array} \end{array}$$

Obtenir une matrice échelonnée

Pour obtenir la forme échelonnée d'une matrice quelconque :

1. Appliquer la procédure d'élimination si un pivot est disponible
2. Si un zéro apparaît à la place d'un pivot mais il existe un élément non nul dans la même colonne, permuter les lignes pour obtenir un pivot
3. Si aucun pivot n'est disponible dans une colonne, passer à la prochaine colonne pour appliquer la procédure d'élimination

Obtenir une matrice échelonnée

Pour obtenir la forme échelonnée d'une matrice quelconque :

1. Appliquer la procédure d'élimination si un pivot est disponible
2. Si un zéro apparaît à la place d'un pivot mais il existe un élément non nul dans la même colonne, permuter les lignes pour obtenir un pivot
3. Si aucun pivot n'est disponible dans une colonne, passer à la prochaine colonne pour appliquer la procédure d'élimination

Définitions

- Les colonnes contenant un pivot correspondent aux *variables pivots*
- Les colonnes ne contenant pas de pivot correspondent aux *variables libres*

Et : *Les col. libres sont combinaison des col. pivot précédentes*

Exemple (forme d'une matrice échelonnée)

Exercice 3.2.11 p. 142

Résolution de $A\mathrm{x} = 0$ (solutions spéciales)

Pour résoudre le SÉL $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, c'est-à-dire **obtenir le noyau de** A :

1. Obtenir U la forme échelonnée de A. Résoudre $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ revient à résoudre $U\mathbf{x} = \mathbf{0}$; Ou encore $N(A) = N(U)$
2. Poser la première variable libre égale à 1 et les autres variables libres égales à 0
3. Résoudre le système triangulaire ainsi obtenu pour les variables pivots. Ceci donne la première *solution spéciale*
4. Répéter les étapes 2 et 3 pour chacune des autres variables libres. Ceci donne les *solutions spéciales* du SÉL

Résolution de $A\mathrm{x} = 0$ (solution complète)

- Si $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_p$ sont les solutions spéciales du SÉL alors

  $$N(A) = \big\{\alpha_1\mathbf{s}_1 + \alpha_2\mathbf{s}_2 + \ldots + \alpha_p\mathbf{s}_p \,:\, \alpha_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2, \ldots, p\}\big\}$$

- Le noyau de A est constitué de toutes les combinaisons linéaires des solutions spéciales
- On peut aussi écrire que la solution complète est

  $$\mathbf{x} = x_{i_1}\mathbf{s}_1 + x_{i_2}\mathbf{s}_2 + \ldots + x_{i_p}\mathbf{s}_p$$

  avec $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p}$ les p variables libres *associées* aux p solutions spéciales : $\mathbf{s}_k$ a été obtenue en fixant la variable libre x_{i_k} à 1 et les autres variables libres à 0
- Il est plus simple de ne pas numéroter les solutions spéciales $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$, …, $\mathbf{s}_p$, mais plutôt $\mathbf{s}_{i_1}$, $\mathbf{s}_{i_2}$, …, $\mathbf{s}_{i_p}$

Exemple

Trouver le noyau de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & 10 \\ 3 & 3 & 10 & 13 \end{bmatrix}$$

avec la forme échelonnée U

Remarques

- Si A est de taille $m \times n$ alors elle possède au plus m pivots : il ne peut y avoir plus de pivots que de lignes
- Le nombre de pivots ne peut pas non plus dépasser le nombre de colonnes
- Si $m < n$ (plus de colonnes que de lignes) alors il y a au moins $n - m > 0$ variables libres. Dans ce cas, le noyau contient des solutions non triviales : $N(A) \neq \{\mathbf{0}\}$
- Le nombre de pivots sera appelé le *rang* de A

Exemple

Exercice 3.2.9 p. 142

1. Définition du noyau

2. Matrice échelonnée

3. Matrice échelonnée réduite

Matrice échelonnée réduite

- Une matrice R est *échelonnée réduite* si
  1. Elle est échelonnée
  2. Chaque pivot est égal à 1
  3. Chaque pivot est le seul élément non nul dans sa colonne

- **Exemple :**

$$R = \begin{bmatrix} 1 & * & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 6}$$

- On obtient la forme échelonnée réduite en poursuivant l'élimination de façon à obtenir des zéros au-dessus des pivots, puis en divisant chaque ligne par son pivot (si elle en contient un)

Remarques

- $N(A) = N(U) = N(R)$
- Si A est inversible alors sa forme échelonnée réduite est la matrice identité I, et alors la seule solution à $I\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ et $N(A) = \{\mathbf{0}\}$
- Obtenir les solutions spéciales à partir de R est plus facile : on trouve les coefficients de chaque solution spéciale avec les coefficients de la colonne libre

Exemple

Trouver le noyau de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & 10 \\ 3 & 3 & 10 & 13 \end{bmatrix}$$

avec la forme échelonnée réduite R

Commandes `MATLAB`

- Pour obtenir R à partir de A, ainsi qu'une liste des colonnes pivot : `[R,pivcol]=rref(A)`
- Pour obtenir les solutions spéciales : `s=null(A,'r')`