

MTH1007 — Algèbre linéaire pour ingénieurs

Série 5 : Décomposition LU

Exercices (énoncés)

Les numéros renvoient au manuel [alfa](#) (série d'exercices.numéro).

Exercice 8.6 (★)

Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ -2 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer $\det(\mathbf{A})$.
2. En admettant qu'une décomposition LU de $\mathbf{A}$ existe, telle que $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ où $\mathbf{L}$ est triangulaire inférieure avec des 1 sur sa diagonale et $\mathbf{U}$ est triangulaire supérieure, donner $\det(\mathbf{U})$ *sans calcul supplémentaire*.

Exercice 8.7 (★)

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$.

1. Donner une décomposition LU de $\mathbf{A}$.
2. Résoudre $\mathbf{Ax} = \mathbf{b} = (1, 1, 1)$ en résolvant d'abord $\mathbf{Lc} = \mathbf{b}$ puis $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$.

Exercice 8.8 (★)

Donner une autre décomposition LU de la matrice $\mathbf{A}$ de l'exercice 8.7.

Exercice 8.9 (★)

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Donner une décomposition LU de $\mathbf{A}$.
2. Résoudre $\mathbf{Ax} = \mathbf{b} = (2, 8, 10)$ en utilisant la décomposition LU de la question précédente.

Exercice 8.10 (*)

Soit $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ qui correspond à la matrice $\mathbf{A}$ donnée à l'exercice 8.9, sans sa dernière colonne. En se basant sur la décomposition LU de la matrice A déjà obtenue à l'exercice 8.9, donner une décomposition LU de $\mathbf{B}$ sans aucun calcul supplémentaire.

Exercice 8.12 ()**

Soient a et b deux réels, considérons le système d'inconnues x_1, x_2, x_3, x_4 suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = a \\ 5x_1 + 12x_2 + 11x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 3x_4 = b \end{cases}$$

1. Écrire la matrice $\mathbf{A}$ des coefficients du système et en trouver une décomposition LU.
2. Résoudre le système à l'aide de cette décomposition. Écrire les solutions sous forme paramétrique vectorielle s'il y a lieu.

Exercice 8.22 ()**

Soit la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 & 2 \\ -2 & 5 & 13 & 2 \\ -3 & 18 & 42 & -5 \\ 4 & 14 & -21 & -11 \end{bmatrix}$

1. Effectuer une décomposition LU de $\mathbf{A}$.
2. En déduire le déterminant de $\mathbf{A}$.

Exercice 8.30 Factorisation LU d'une transposée (*)

Soit la matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ définie par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -7 \\ 2 & -2 & 9 \end{bmatrix}$$

dont une factorisation LU est donnée par

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Donner une factorisation LU de $\mathbf{A}^\top$.

2. Utiliser cette factorisation pour résoudre en deux étapes le système $\mathbf{A}^\top \mathbf{x} = \mathbf{b}$ avec

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 24 \end{bmatrix}.$$

Exercice 12.7 factorisation de Cholesky explicite ()**

Soit la matrice réelle

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 13 & 23 \\ 4 & 23 & 77 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer qu'il existe une matrice triangulaire inférieure $\mathbf{L}$ à coefficients réels telle que $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$.
2. La factorisation $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$ est-elle unique ?
3. Déterminer explicitement une telle matrice $\mathbf{L}$ satisfaisant la factorisation.