

## 5. Décomposition LU

MTH1007

Sébastien Le Digabel  
Polytechnique Montréal

A26

2026-07-28

v0

# Plan

## Décomposition LU

Définition

Résolution d'un SÉL

## Variantes de la décomposition LU

Décomposition LDU

Décomposition LDLT

Décomposition de Cholesky

Décomposition  $PA=LU$

## Liens avec le manuel *alfa*

- ▶ 8.6 : Décomposition LU
- ▶ 12.2 : Décomposition de Cholesky

## Décomposition LU

Définition

Résolution d'un SÉL

## Variantes de la décomposition LU

Décomposition LDU

Décomposition LDLT

Décomposition de Cholesky

Décomposition  $PA=LU$

## Décomposition (ou factorisation) LU (1/2)

Étant donnée  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , l'élimination **sans permutation** permet d'écrire

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$$

où

- ▶  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  est une matrice échelonnée obtenue par élimination
- ▶  $\mathbf{L} = (\mathbf{E}_p \mathbf{E}_{p-1} \cdots \mathbf{E}_1)^{-1} = \mathbf{E}_1^{-1} \cdots \mathbf{E}_{p-1}^{-1} \mathbf{E}_p^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  est le produit des inverses des matrices d'élimination. Cette matrice est triangulaire inférieure

Ceci est **une décomposition (ou factorisation) LU** de la matrice  $\mathbf{A}$

## Décomposition LU (2/2)

On remarque que :

- ▶  $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$  est triangulaire inférieure
- ▶  $L$  possède des 1 sur sa diagonale
- ▶ Chaque multiplicateur  $\ell_{i,j}$  de l'opération  $L_i \leftarrow L_i - \ell_{i,j}L_j$  est à la position  $(i, j)$  dans  $L$  :

$$L(i, j) = \ell_{i,j}$$

- ▶  $U$  est échelonnée (ou triangulaire supérieure si  $m = n$ )

# Exercice 1

Effectuer une décomposition LU de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

# Résolution d'un SÉL

Un système carré = deux systèmes triangulaires

Pour résoudre un SÉL carré (réalisable)  $Ax = b$  :

1. Factoriser  $A = LU$
2. Résoudre  $LUx = b$  via deux systèmes triangulaires :
  - 2.1 Résoudre  $Lc = b$  par descente triangulaire
  - 2.2 Résoudre  $Ux = c$  par remontée triangulaire

La solution du SÉL est le  $x$  trouvé à l'étape 2.2

## Exercice 2

En utilisant une décomposition LU, résoudre le système  $3 \times 3$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 10 \end{cases}$$

## Décomposition LU

Définition

Résolution d'un SÉL

## Variantes de la décomposition LU

Décomposition LDU

Décomposition LDLT

Décomposition de Cholesky

Décomposition  $PA=LU$

## Décomposition LDU

Pour une matrice **inversible** de taille  $3 \times 3$ , si  $p_1, p_2, p_3$  sont les pivots sur la diagonale de  $U$  dans la décomposition LU et

$$D = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix}$$

alors en divisant les lignes de  $U$  par les pivots on obtient

$$\begin{bmatrix} p_1 & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & p_2 & u_{2,3} \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{u_{1,2}}{p_1} & \frac{u_{1,3}}{p_1} \\ 0 & 1 & \frac{u_{2,3}}{p_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = D U'$$

Ainsi,  $A = LU = LDU'$ . Ceci est une **décomposition LDU** de  $A$

## Décomposition LDLT

- ▶ Si  $A$  est **inversible** et **symétrique** et se factorise en  $A = LDU$  alors  $U = L^T$  et

$$A = A^T = (LDU)^T = U^T D L^T = L D L^T$$

Ceci est la **décomposition LDLT** de  $A$

- ▶ **Exercice 3** : Illustrer sur  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$

## Décomposition de Cholesky

- Soit  $A$  symétrique et  $A = L'DL'^\top$ . Si  $A$  est **définie positive**, alors tous les coefficients de  $D$  sont positifs, et on peut avoir  $M$  diagonale telle que  $D = M^2$ . Alors

$$A = (L'M)(ML'^\top) = (L'M)(L'M)^\top = LL^\top$$

est la **décomposition de Cholesky** de  $A$

- **Exercice 4** : Montrer que  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} = LL^\top$  avec

$$L = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

## Décomposition $PA = LU$

- ▶ Quand  $A^{-1}$  existe, si on a un 0 à la place d'un pivot alors on peut obtenir un pivot non-nul en permutant deux lignes à l'aide d'une matrice de permutation
- ▶ L'ensemble des permutations nécessaires à l'élimination peut être rassemblé en **une** matrice de permutation **P**
- ▶ Il existe donc une matrice de permutation **P** telle que la procédure d'élimination fonctionne pour la matrice **PA**

On obtient la décomposition suivante de **A** :

$$PA = LU$$

## Exercice 5

Donner deux décompositions  $PA = LU$  pour  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{bmatrix}$