4. Espaces de vecteurs

Section 3.1

MTH1007

J. Guérin, N. Lahrichi, S. Le Digabel
Polytechnique Montréal

H2023

(v1)

Plan

Espaces de vecteurs

Un *espace vectoriel* (réel) est un ensemble V muni de deux opérations : si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont des éléments de V et $c \in \mathbb{R}$ alors on définit des éléments

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$
2. $c\mathbf{u} \in V$

Ces deux opérations satisfont à 8 propriétés telles que la commutativité, l'associativité, etc.

Remarque : On peut aussi définir des espaces vectoriels avec des scalaires $c \in \mathbb{C}$

Les 8 propriétés d'un espace vectoriel V

1. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$
2. $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$
3. Il existe un vecteur $\mathbf{0}$ unique tel que $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$
4. Il existe un vecteur $-\mathbf{u}$ unique tel que $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$
5. $1\times\mathbf{u}=\mathbf{u}$
6. $(c_1c_2)\mathbf{u}=c_1(c_2\mathbf{u})$
7. $c(\mathbf{u}+\mathbf{v})=c\mathbf{u}+c\mathbf{v}$
8. $(c_1+c_2)\mathbf{u}=c_1\mathbf{u}+c_2\mathbf{u}$

(avec $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$ et c_1,c_2,c des scalaires)

Exemples d'espaces vectoriels

- *L'espace* $\mathbb{R}^n$ est formé de tous les vecteurs colonnes $\mathbf{v}$ à n composantes réelles
- *Espace* $\mathbb{C}^n$: les composantes de $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ sont des nombres complexes
- $\mathbb{M}^n$: matrices réelles $n \times n$
- $\mathbb{F}$: fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$: $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ avec $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- $\mathbb{Z} = \{\mathbf{0}\}$: vecteur zéro uniquement

1. Espaces de vecteurs

2. Sous-espaces

3. L'espace des colonnes

Sous-espaces vectoriels (sev)

Un *sous-espace* d'un espace vectoriel V est un sous-ensemble W de vecteurs de V, incluant $\mathbf{0}$, qui satisfait à deux exigences :

Si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont des vecteurs du sous-espace $W \subseteq V$ et si $c \in \mathbb{R}$ alors :

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ appartient à W (fermeture sous l'addition)
2. $c\mathbf{u}$ appartient à W (fermeture sous la multiplication par un scalaire)

Remarques

1. Les exigences dans la définition d'un sev W impliquent que $\mathbf{0} \in W$. Autrement dit, un sev contient toujours le vecteur nul

Remarques

1. Les exigences dans la définition d'un sev W impliquent que $\mathbf{0} \in W$. Autrement dit, un sev contient toujours le vecteur nul
2. Par définition, un sev W contient toutes les combinaisons linéaires de vecteurs provenant de W

Remarques

1. Les exigences dans la définition d'un sev W impliquent que $\mathbf{0} \in W$. Autrement dit, un sev contient toujours le vecteur nul
2. Par définition, un sev W contient toutes les combinaisons linéaires de vecteurs provenant de W
3. Réciproquement, si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ sont des vecteurs de l'espace vectoriel V alors l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de ces vecteurs est un sev de V

Remarques

1. Les exigences dans la définition d'un sev W impliquent que $\mathbf{0} \in W$. Autrement dit, un sev contient toujours le vecteur nul
2. Par définition, un sev W contient toutes les combinaisons linéaires de vecteurs provenant de W
3. Réciproquement, si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ sont des vecteurs de l'espace vectoriel V alors l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de ces vecteurs est un sev de V
   Ce sous-espace est appelé le *sous-espace engendré* par les vecteurs $\mathbf{v}_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

Remarques

1. Les exigences dans la définition d'un sev W impliquent que $\mathbf{0} \in W$. Autrement dit, un sev contient toujours le vecteur nul
2. Par définition, un sev W contient toutes les combinaisons linéaires de vecteurs provenant de W
3. Réciproquement, si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ sont des vecteurs de l'espace vectoriel V alors l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de ces vecteurs est un sev de V
   Ce sous-espace est appelé le *sous-espace engendré* par les vecteurs $\mathbf{v}_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$
4. Si V est un espace vectoriel alors V lui-même et $\mathbb{Z} = \{\mathbf{0}\}$ sont des sev de V. On les appelle les *sous-espaces triviaux*

Remarques

1. Les exigences dans la définition d'un sev W impliquent que $\mathbf{0} \in W$. Autrement dit, un sev contient toujours le vecteur nul
2. Par définition, un sev W contient toutes les combinaisons linéaires de vecteurs provenant de W
3. Réciproquement, si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ sont des vecteurs de l'espace vectoriel V alors l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de ces vecteurs est un sev de V
   Ce sous-espace est appelé le *sous-espace engendré* par les vecteurs $\mathbf{v}_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$
4. Si V est un espace vectoriel alors V lui-même et $\mathbb{Z} = \{\mathbf{0}\}$ sont des sev de V. On les appelle les *sous-espaces triviaux*
5. Un sev est un espace vectoriel

Exemples de sev

- Un plan dans $\mathbb{R}^3$ qui passe par l'origine

  (un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ de *dimension* $n-1$ est appelé un *hyperplan*)

- Une droite dans $\mathbb{R}^3$ qui passe par l'origine

- Deux sous-espaces de $\mathbb{M}^n$, l'ensemble des matrices $n \times n$:
  - Toutes les matrices triangulaires supérieures de taille $n \times n$
  - Toutes les matrices diagonales de taille $n \times n$

1. Espaces de vecteurs

2. Sous-espaces

3. L'espace des colonnes

Définition

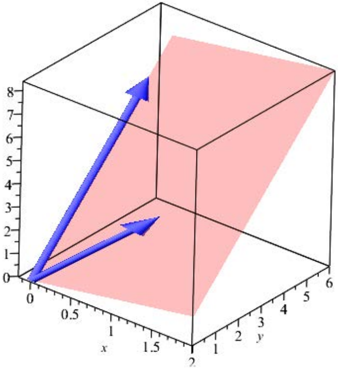
- L'*espace des colonnes* (ou l'image) d'une matrice A de taille $m \times n$ est constitué de toutes les combinaisons linéaires des colonnes de A (vues comme des vecteurs)
- Ce sont donc tous les vecteurs $A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ possibles, avec $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- Il est noté $C(A)$. C'est un sous-espace de $\mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned} C(A) &= \{A\mathbf{x} \text{ pour tout } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \text{ tel qu'il existe } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ avec } A\mathbf{x} = \mathbf{b}\} \\ &\subseteq \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

- **Important :** Le SÉL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possède (*au moins*) une solution si et seulement si $\mathbf{b} \in C(A)$

Exemple

L'espace des colonnes de la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ est représenté par un plan dans l'espace :



Exemple

Décrire l'espace des colonnes des trois matrices suivantes :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$