

4. Solution complète

MTH1007

Sébastien Le Digabel
Polytechnique Montréal

A26

2026-07-28

v0

Plan

Portrait global

Solution complète d'un SÉL

Principe

Quatre cas de figure

Résumé

Liens avec le manuel *alfa*

- ▶ 6.1 : Espaces vectoriels et matrices
- ▶ 6.2 : Portrait global
- ▶ 8.4 : Solution complète

Portrait global

Solution complète d'un SÉL

Principe

Quatre cas de figure

Résumé

Image de $\mathbf{A}$: $\text{Im}(\mathbf{A})$

On considère une matrice $\mathbf{A}$ de taille $m \times n$ et $\mathbf{U}$ et $\mathbf{R}$ les matrices échelonnée et échelonnée réduite obtenues à partir de $\mathbf{A}$. Soit $r = \text{rg}(\mathbf{A})$

1. $\text{Im}(\mathbf{A})$ est le sous-espace de $\mathbb{R}^m$ engendré par les colonnes de $\mathbf{A}$
2. En général, $\text{Im}(\mathbf{A}) \neq \text{Im}(\mathbf{U}) \neq \text{Im}(\mathbf{R})$
3. Les r colonnes pivots de $\mathbf{A}$ forment une base de $\text{Im}(\mathbf{A})$
4. La dimension de $\text{Im}(\mathbf{A})$, de $\text{Im}(\mathbf{U})$, et de $\text{Im}(\mathbf{R})$ est égale au rang r de $\mathbf{A}$:

$$\dim(\text{Im}(\mathbf{A})) = \dim(\text{Im}(\mathbf{U})) = \dim(\text{Im}(\mathbf{R})) = r$$

Espace des lignes de $\mathbf{A}$: $\text{Im}(\mathbf{A}^\top)$

Avec les mêmes $\mathbf{A}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{R}$ et r

1. L'*espace des lignes de $\mathbf{A}$* , noté $\text{Im}(\mathbf{A}^\top)$, est le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par les lignes de $\mathbf{A}$
2. $\mathbf{A}$, $\mathbf{U}$ et $\mathbf{R}$ ont le même espace des lignes :
 $\text{Im}(\mathbf{A}^\top) = \text{Im}(\mathbf{U}^\top) = \text{Im}(\mathbf{R}^\top)$
3. Les r premières lignes de $\mathbf{U}$ et les r premières lignes de $\mathbf{R}$ forment deux bases de $\text{Im}(\mathbf{A}^\top)$
4. Les r lignes de $\mathbf{A}$ qui ont mené à des pivots forment une autre base de $\text{Im}(\mathbf{A}^\top)$
5. La dimension de $\text{Im}(\mathbf{A}^\top)$, de $\text{Im}(\mathbf{U}^\top)$ et de $\text{Im}(\mathbf{R}^\top)$ est égale au rang r de $\mathbf{A}$:

$$\dim(\text{Im}(\mathbf{A}^\top)) = \dim(\text{Im}(\mathbf{U}^\top)) = \dim(\text{Im}(\mathbf{R}^\top)) = r$$

Noyau de $\mathbf{A}$: $\text{Ker}(\mathbf{A})$

Avec les mêmes $\mathbf{A}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{R}$ et r

1. $\text{Ker}(\mathbf{A})$ est le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ constitué des vecteurs $\mathbf{x}$ tels que $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$
2. $\mathbf{A}$, $\mathbf{U}$ et $\mathbf{R}$ ont le même noyau :
 $\text{Ker}(\mathbf{A}) = \text{Ker}(\mathbf{U}) = \text{Ker}(\mathbf{R})$
3. Les solutions spéciales forment une base de $\text{Ker}(\mathbf{A})$, de $\text{Ker}(\mathbf{U})$, et de $\text{Ker}(\mathbf{R})$
4. On a

$$\dim(\text{Ker}(\mathbf{A})) = \dim(\text{Ker}(\mathbf{U})) = \dim(\text{Ker}(\mathbf{R})) = n - r$$

Noyau à gauche de $\mathbf{A}$: $\text{Ker}(\mathbf{A}^\top)$

Avec $\mathbf{A}$ de rang r

1. Le *noyau à gauche de $\mathbf{A}$* , noté $\text{Ker}(\mathbf{A}^\top)$, est le sous-espace de $\mathbb{R}^m$ constitué des vecteurs $\mathbf{y}$ tels que $\mathbf{A}^\top \mathbf{y} = \mathbf{0}$
2. On a

$$\dim(\text{Ker}(\mathbf{A}^\top)) = m - r$$

Dimensions des quatre sous-espaces

$$\begin{array}{lll} \text{Im}(\mathbf{A}) & \text{sous-espace de } \mathbb{R}^m \text{ et } \dim(\text{Im}(\mathbf{A})) & = r \\ \text{Im}(\mathbf{A}^\top) & \text{sous-espace de } \mathbb{R}^n \text{ et } \dim(\text{Im}(\mathbf{A}^\top)) & = r \\ \text{Ker}(\mathbf{A}) & \text{sous-espace de } \mathbb{R}^n \text{ et } \dim(\text{Ker}(\mathbf{A})) & = n - r \\ \text{Ker}(\mathbf{A}^\top) & \text{sous-espace de } \mathbb{R}^m \text{ et } \dim(\text{Ker}(\mathbf{A}^\top)) & = m - r \end{array}$$

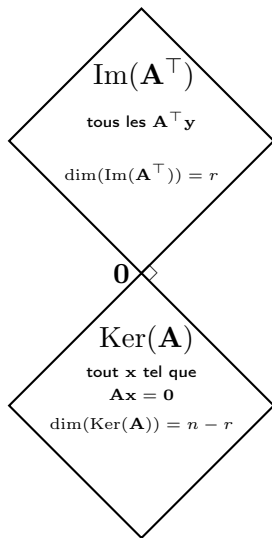
Théorème du rang

Pour toute matrice $\mathbf{A}$ de taille $m \times n$ on a :

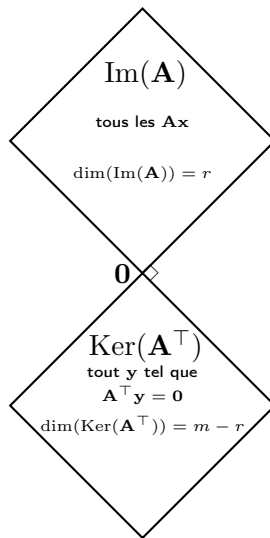
1. $\dim(\text{Im}(\mathbf{A}^\top)) + \dim(\text{Ker}(\mathbf{A})) = n$
2. $\dim(\text{Im}(\mathbf{A})) + \dim(\text{Ker}(\mathbf{A}^\top)) = m$

Portrait global

$\mathbb{R}^n$



$\mathbb{R}^m$



Exercice 4

Illustrer les différents concepts sur

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Portrait global

Solution complète d'un SÉL

Principe

Quatre cas de figure

Résumé

Résolution complète d'un SÉL

Pour résoudre $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

1. Former la matrice augmentée $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$
2. Réduire $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ pour obtenir $[\mathbf{R}|\mathbf{d}]$ où $\mathbf{R}$ est échelonnée réduite¹
3. Résoudre le système $[\mathbf{R}|\mathbf{d}]$ pour les variables pivot en fonction des variables libres, si possible

Important : Une solution existe si et seulement si chaque ligne nulle dans $\mathbf{R}$ correspond à un 0 dans $\mathbf{d}$

1. à des fins de simplicité de présentation, on suppose que les colonnes pivot sont déjà à la bonne position dans $\mathbf{R}$, c'est-à-dire $\mathbf{R} = \mathbf{R}'$

Solution particulière et solution complète

- ▶ Une *solution particulière* $\mathbf{x}_p$ du SÉL $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ (si elle existe)² est obtenue en posant les $n - r$ variables libres à zéro, et les r variables pivot à une des composantes de $\mathbf{d}$:

$$\mathbf{x}_p(j) = \begin{cases} 0 & \text{si la } j\text{-ième variable est libre} \\ d_k & \text{si la } j\text{-ième variable est pivot} \\ & (k \text{ est l'indice de ligne du pivot correspondant}) \end{cases}$$

- ▶ Toute solution du SÉL $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ s'écrit alors $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^n$ avec $\mathbf{x}_n \in \text{Ker}(\mathbf{A}) \subseteq \mathbb{R}^n$ (combinaison des solutions spéciales)

2. pour cela on doit avoir $d_{r+1} = d_{r+2} = \dots = d_m = 0$ quand $r < m$

Matrice de plein rang ligne : $r = m < n$

On considère une matrice $\mathbf{A}$ de taille $m \times n$ avec $\text{rg}(\mathbf{A}) = m$

- ▶ $\mathbf{R} = \left[\mathbf{I}_m \quad \mathbf{F} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)} \right]$
- ▶ Chaque ligne possède un pivot
- ▶ Il y a $n - m > 0$ variables libres et solutions spéciales
- ▶ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ possède une infinité de solutions

Exercice 6 avec $[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{array} \right]$

Exercice 6 : Démarche

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{A} \ \mathbf{b}] &= \left[\boxed{1} \quad 2 \quad 1 \quad 2 \right]_{L_2 \leftarrow \widetilde{L_2 - L_1}} \left[\boxed{1} \quad 2 \quad 1 \quad 2 \right] \\
 &\quad_{L_1 \leftarrow \widetilde{L_1 + L_2/2}} \left[\boxed{1} \quad 2 \quad 0 \quad 3 \right]_{L_2 \leftarrow \widetilde{L_2/(-2)}} \left[\boxed{-2} \quad 2 \right] \\
 &\quad \left[\boxed{1} \quad 2 \quad 0 \quad 3 \right]_{L_2 \leftarrow \widetilde{L_2/(-2)}} \left[\boxed{-2} \quad 2 \right] = [\mathbf{R} \ \mathbf{d}]
 \end{aligned}$$

- Solution particulière : $\mathbf{x}_p = (d_1, 0, d_2) = (3, 0, -1)$
- Noyau :

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{N}' = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{N} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{s}_2]$$

$\mathbf{x}_n \in \text{Ker}(\mathbf{A})$ si $\mathbf{x}_n = x_2 \mathbf{s}_2$

- Solution complète de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 2x_2 \\ x_2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{c'est une droite de } \mathbb{R}^3$$

Matrice de plein rang colonne : $r = n < m$

On considère une matrice $\mathbf{A}$ de taille $m \times n$ avec $\text{rg}(\mathbf{A}) = n$

- ▶ $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ \mathbf{O}_{m-n,n} \end{bmatrix}$
- ▶ Chaque colonne possède un pivot
- ▶ Il n'y a aucune variable libre ou solution spéciale
- ▶ $\text{Ker}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$
- ▶ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ possède soit une solution unique, soit aucune solution

Exercice 7 avec $[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 2 & b_2 \\ -2 & -3 & b_3 \end{array} \right]$

Exercice 7 : Démarche

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{A} \ \mathbf{b}] &= \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & b_1 \\ 1 & 2 & b_2 \\ -2 & -3 & b_3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow \widetilde{L_2} - L_1 \\ L_3 \leftarrow \widetilde{L_3} + 2L_1}]{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & b_1 \\ 0 & \boxed{1} & b_2 - b_1 \\ 0 & -1 & b_3 + 2b_1 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow \widetilde{L_3} + L_2}]{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & b_1 \\ 0 & \boxed{1} & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & b_1 + b_2 + b_3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_1 \leftarrow \widetilde{L_1} - L_2}]{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 2b_1 - b_2 \\ 0 & \boxed{1} & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & b_1 + b_2 + b_3 \end{bmatrix} = [\mathbf{R} \ \mathbf{d}]
 \end{aligned}$$

- ▶ Si $b_1 + b_2 + b_3 \neq 0$, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ n'a pas de solution
- ▶ Sinon, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ possède la solution unique

$$\mathbf{x}^* = (d_1, d_2) = (2b_1 - b_2, b_2 - b_1)$$

Matrice carrée de plein rang : $r = m = n$

On considère une matrice $\mathbf{A}$ de taille $n \times n$ avec $\text{rg}(\mathbf{A}) = n$

- ▶ $\mathbf{R} = \mathbf{I}_n$
- ▶ Chaque ligne et chaque colonne possèdent un pivot
- ▶ Il n'y a aucune variable libre et aucune solution spéciale
- ▶ $\text{Ker}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$
- ▶ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ possède une solution unique $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$

Matrice qui n'est pas de plein rang : $r < m$ et $r < n$

On considère une matrice $\mathbf{A}$ de taille $m \times n$ avec

$$\text{rg}(\mathbf{A}) = r < \min \{m, n\}$$

- ▶ $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{F} \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)} \\ \mathbf{O}_{m-r,r} & \mathbf{O}_{m-r,n-r} \end{bmatrix}$
- ▶ Certaines lignes et certaines colonnes n'ont pas de pivot
- ▶ Il y a $n - r$ variables libres et solutions spéciales
- ▶ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ possède soit aucune solution, soit une infinité de solutions

Résumé

Les quatre possibilités sont :

$r = m < n$ plein rang ligne $\mathbf{R} = [\mathbf{I} \ \mathbf{F}]$ ∞ de sol.

$r = n < m$ plein rang col. $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix}$ 0 ou 1 sol.

$r = m = n$ plein rang $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ 1 solution

$r < m$ et $r < n$ pas de plein rang $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{F} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}$ 0 ou ∞ de sol.