

# MTH1007 — Algèbre linéaire pour ingénieurs

## Série 4 : Solution complète

### Exercices (énoncés)

Les numéros renvoient au manuel [alfa](#) (série d'exercices.numéro).

#### Exercice 6.3 (★)

Donner une matrice  $\mathbf{A}$  telle que  $\text{Im}(\mathbf{A})$  est égale à

$$\{(-3a, 5c - 6b, a + b + c, a - c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

#### Exercice 6.10 (★)

On considère la matrice

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}.$$

1. Déterminer un ensemble générateur de  $\text{Im}(\mathbf{B})$ , puis en extraire une base.
2. Calculer  $\text{rg}(\mathbf{B})$ .
3. En utilisant le théorème du rang, déterminer  $\dim(\text{Ker}(\mathbf{B}))$ .

#### Exercice 6.11 (★)

Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 2}.$$

1. Montrer que les colonnes de  $\mathbf{A}$  sont linéairement dépendantes.
2. En déduire une base de  $\text{Im}(\mathbf{A})$  et sa dimension.
3. Utiliser le théorème du rang pour calculer  $\dim(\text{Ker}(\mathbf{A}))$ .

#### Exercice 6.12 (★★)

1. Soit  $\mathbf{A}$  de taille  $m \times n$  dont la somme des colonnes est égale au vecteur nul de  $\mathbb{R}^m$ .  
Donner un vecteur de  $\text{Ker}(\mathbf{A})$ .

2. Notons  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$ . Donner une base de  $\text{Ker}(\mathbf{A})$ . En déduire le rang de  $\mathbf{A}$ .
3. Donner une base de  $\text{Im}(\mathbf{A}^\top)$ . En déduire la dimension de  $\text{Ker}(\mathbf{A}^\top)$ .

### Exercice 6.17 (★)

1. Pour

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

déterminer le rang, une base de  $\text{Im}(\mathbf{A})$  et de  $\text{Ker}(\mathbf{A})$ , puis vérifier le théorème du rang.

### Exercice 6.20 (★)

Donner une base de chacun des quatre espaces fondamentaux et vérifier le théorème du rang pour

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

### Exercice 6.26 (★)

Soient  $k \in \mathbb{R}$  et la matrice à paramètre

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & k & -1 \end{bmatrix}.$$

1. Donner  $\text{rg}(\mathbf{A}_k)$  selon les valeurs de  $k$ .
2. Donner les valeurs de  $k$  pour lesquelles :
  - (a) le système  $\mathbf{A}_k \mathbf{x} = \mathbf{b}$  admet au moins une solution pour tout  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ ;
  - (b) les colonnes de  $\mathbf{A}_k$  sont linéairement indépendantes;
  - (c) le système  $\mathbf{A}_k \mathbf{x} = \mathbf{b}$  admet au plus une solution pour tout  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ ;
  - (d) selon le membre de droite  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ , le système  $\mathbf{A}_k \mathbf{x} = \mathbf{b}$  admet soit une solution unique, soit une infinité de solutions;
  - (e) le système  $\mathbf{A}_k \mathbf{x} = \mathbf{b}$  admet une solution unique pour tout  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ ;
  - (f)  $\mathbf{A}_k$  est inversible.
3. Donner les solutions spéciales du noyau associées à  $\mathbf{A}_2$ .

**Exercice 8.1 vrai ou faux (★)**

Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

1. Un système de  $m$  équations et  $n$  inconnues, avec  $m < n$ , possède toujours une infinité de solutions.
2. Si le noyau de  $\mathbf{A}$  est réduit au vecteur nul, alors  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  possède une unique solution pour tout  $\mathbf{b}$ .
3. Soient une matrice  $\mathbf{A}$  et un scalaire  $k \neq 0$ . On a  $\text{Ker}(\mathbf{A}) = \text{Ker}(k\mathbf{A})$ .

**Exercice 8.3 (★★)**

Soit le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x + \kappa z = 0 \\ x + (\kappa + 1)y - z = 0 \end{cases}$$

où  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

1. Donner  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{b}$  afin de pouvoir écrire le système sous la forme matricielle  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ .
2. Déterminer les conditions sur  $\kappa$  pour que le système
  - ▷ ne possède aucune solution ;
  - ▷ possède une infinité de solutions ;
  - ▷ possède une solution unique.
3. Résoudre le système pour  $\kappa = 2$ .
4. Résoudre le système pour  $\kappa = -1$ .

**Exercice 8.11 (★★★)**

Soient  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et deux vecteurs  $\mathbf{b}_1$  et  $\mathbf{b}_2$  dans  $\mathbb{R}^m$  tels que

$$[\mathbf{R} \ \mathbf{d}_1 \ \mathbf{d}_2] = \mathbf{M}[\mathbf{A} \ \mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2]$$

avec  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{d}_1$  et  $\mathbf{d}_2$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^m$ , et  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  inversible.

1. Si  $m = n$  et  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ , exprimer  $\mathbf{M}$  en fonction de  $\mathbf{A}$ , puis  $\mathbf{b}_1$  et  $\mathbf{b}_2$  en fonction uniquement de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{d}_1$  et  $\mathbf{d}_2$ .
2. Si  $n > m$  et  $\mathbf{R} = [\mathbf{I} \ \mathbf{F}]$  avec  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ , trouver  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  dans  $\mathbb{R}^n$  tels que  $\mathbf{Ax}_1 = \mathbf{b}_1$  et  $\mathbf{Ax}_2 = \mathbf{b}_2$ .

**Exercice 8.13 (★★)**

Selon la matrice  $\mathbf{A}$  donnée ci-dessous, déterminer si le système  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  est réalisable pour tout  $\mathbf{b}$  et indiquer le nombre de solutions du système le cas échéant.

$$1. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$3. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

**Exercice 8.14 (★★)**

Pour chacune des matrices données à l'exercice 8.13, si le système  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  est réalisable pour tout  $\mathbf{b}$ , exprimer la solution complète du système.

**Exercice 8.20 (★)**

Soient  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  et  $\mathbf{x}_p$  une solution du système linéaire  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . Soit  $\mathbf{x}_s \in \text{Ker}(\mathbf{A})$ . Montrer que  $\mathbf{x}_p - 2\mathbf{x}_s$  est également une solution du même système linéaire.